Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék 1

Bevezetés 2

I. Első félév 3

1. Nevezetes egyenlőtlenségek 4

2. Koordinátarendszerek 5

3. Sík és térvektorok 8

4. Koordinátageometria 11

4.1. Síkbeli egyenesek . . . 11

4.2. Térbeli egyenesek . . . 12

4.3. A síkok a térben . . . 12

5. Lineáris egyenletrendszerek 13

5.1. Három ismeretlenes egyenletrendszer . . . 13

5.2. Determinánsok . . . 14

6. Komplex számok 16

6.1. Komplex számok algebrai alakja . . . 16

6.2. Műveletek a komplex számok körében . . . 16

6.3. Komplex számok trigonometrikus alakja . . . 17

7. A függvény fogalma 19

7.1. Néhány egyszerű függvénytípus . . . 20

7.2. Műveletek függvényekkel . . . 22

7.3. Függvénytranszformáció . . . 22

8. Határérték, folytonosság 24

8.1. Függvény határértéke . . . 24

8.2. Folytonos függvények . . . 27

8.3. Zárt intervallumon folytonos függvények . . . 28

8.4. Elemi függvények . . . 28

9. Differenciálszámítás **32**
9.1. A derivált fogalma . . . 32
9.2. Deriválási szabályok . . . 33
9.3. Függvényvizsgálat . . . 34

10. Többváltozós függvények **36**
10.1. Folytonos függvények . . . 36
10.2. Parciális derivált . . . 37
10.3. Magasabb rendű parciális derivált . . . 38

11. Primitív függvény, határozatlan integrál **40**

12. Határozott integrál **42**
12.1. A határozott integrál definíciója . . . 42
12.2. A határozott integrál tulajdonságai . . . 43
12.3. A Riemann-integrál kiszámítása . . . 43

13. A határozott integrál alkalmazásai **45**
13.1. A terület és térfogat, ívhossz. . . . 45
13.2. Improprius integrál . . . 46

II. Második félév **49**

14. Többváltozós függvények integrálása **50**
14.1. Integrálás téglán . . . 50
14.2. Integrálás korlátos halmazon . . . 51
14.3. Az integrál kiszámolása, alkalmazásai. . . . 52

15. Számsorozatok konvergenciája **54**
15.1. Konvergens és divergens sorozatok . . . 54
15.2. Műveleti szabályok . . . 54
15.3. Monoton sorozatok . . . 55
15.4. Nevezetes sorozatok . . . 56

16. Numerikus sorok **57**
16.1. Végtelen sorok konvergenciája . . . 57
16.2. Nevezetes numerikus sorok . . . 57
16.3. A konvergencia elemi tulajdonságai . . . 58
16.4. Konvergencia kritériumok . . . 59

17. Hatványsorok, Taylor sor **60**
17.1. Függvénysorok 60
17.2. Hatványsorok 60
17.3. Taylor polinom 61
17.4. Taylor sor 62

18. Fourier-sorok **64**

19. Lineáris vektorterek **67**
19.1. Az n-dimenziós vektortér 67
19.2. Mátrixok 69
19.3. Lineáris leképezések 70
19.4. Determinánsok 72
19.5. Invertálható mátrixok 74
19.6. Sajátérték, sajátvektor 75

20. Differenciálegyenletek **77**
20.1. Elsőrendű differenciálegyenletek 78
20.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek 81
20.3. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek 83

21. Többváltozós leképezések **85**
21.1. Térgörbék 85
21.2. Síkgörbék 86
21.3. Felületek 87
21.4. Skalármező 89
21.5. Vektormező 90
21.6. Divergencia, rotáció 91
21.7. Nabla és Laplace operator 91

22. Vonalintegrál **93**
22.1. A vonalintegrál definíciója 93
22.2. A vonalintegrál tulajdonságai 94
22.3. Konzervatív vektormező 95

Bevezetés

Ez a jegyzet a két féléves "Bevezető matematika kémikusoknak" előadáshoz készült.

Javasolt tankönyvek:

Freud Róbert: Lineáris Algebra
Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I. (Nemzeti Tankönyvkiadó),
Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis II. (Nemzeti Tankönyvkiadó).

Ebben a jegyzetben bizonyítások nem szerepelnek. Az itt illetve az előadáson szerepelt tételek bizonyításai (általában) a fenti tankönyvekben megtalálhatóak.

I. rész

Első félév

1. Nevezetes egyenlőtlenségek

Tétel: Bernoulli egyenlőtlenség.

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \qquad \text{ha } x > -1, n \in \mathbb{N}$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $n = 0$ vagy $n = 1$ vagy $x = 0$.

Definíció: Pozitív számok közepei. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok

- **számtani (algebrai) közepe (átlaga):**

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$

- **mértani (geometriai) közepe:**

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n};$$

- **harmonikus közepe:**

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

  azaz a reciprokok számtani közepének a reciproka;

- **négyzetes közepe:**

$$N = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

  azaz a négyzetek számtani közepének a négyzetgyöke.

Tétel: Közepek közötti egyenlőtlenségek.

$$H \leq G \leq A \leq N.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mind megegyeznek.

Tétel: Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség.
Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számok esetén

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

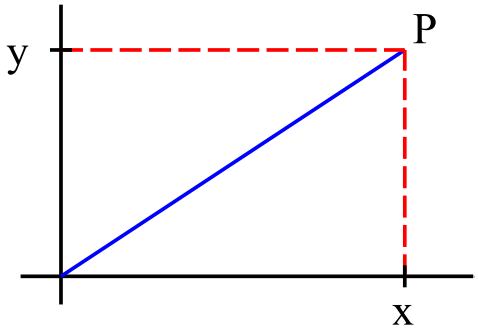
és egyenlőség csak akkor van ha minden $b_i = 0$ vagy megadható egy c valós szám úgy, hogy

$$a_1 = c \cdot b_1, a_2 = c \cdot b_2, \ldots, a_n = c \cdot b_n.$$

2. Koordinátarendszerek

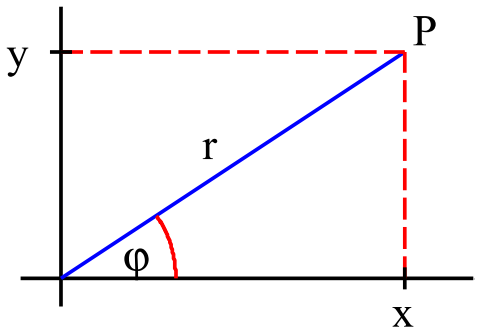
Definíció: Síkbeli Descartes-koordinátarendszer.

Az xy síkban egy tetszőleges P pontot egyértelműen meghatároz egy (x, y) számpár. Itt x a P pont y-tengelytől, y pedig az x-tengelytől való előjeles távolsága.



Definíció: Polárkoordináták.
A sík egy P pontjának polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ha r a P pont origótól mért távolsága,és így $r \geq 0$, a φ szög pedig az origóból induló,a P ponton átmenő félegyenes és az x-tengely pozitív fele által bezárt, a pozitív forgásirányban mért szög, ezért $0 \leq \varphi < 2\pi$.
Az origóhoz tartozó szög nincs egyértelműen meghatározva.

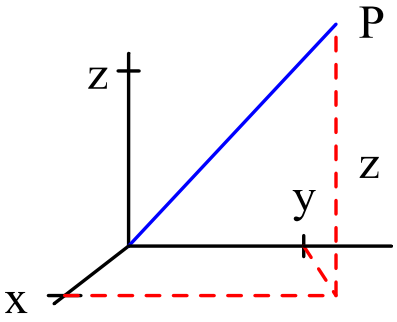
Tétel: A síkbeli Descartes-koordinátákra való átszámítás.



$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

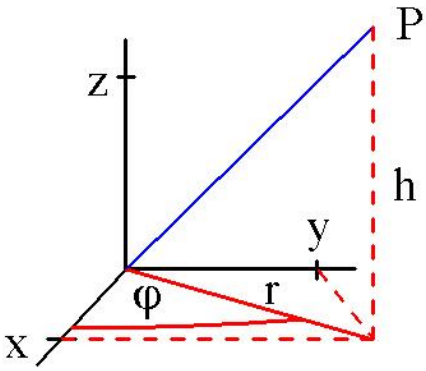
Definíció: Térbeli Descartes-koordinátarendszer.

Az xyz térben egy tetszőleges P pontot egyértelműen meghatároz egy (x, y, z) számhármas. Itt x a P pont yz-síktól, y az xz-síktól z pedig az xy-síktól való előjeles távolsága.



Definíció: Hengerkoordináták.
A tér egy P pontjának hengerkoordinátái az (r, φ, h) számhármas, ha az r a P pont z-tengelytől való távolsága, így $r \geq 0$, φ a P pont xy-síkra való vetületének az xy-síkbeli polárkoordináták szerint kapott szöge, ezért $0 \leq \varphi < 2\pi$, h pedig a P pont xy-síktól való előjeles távolsága.

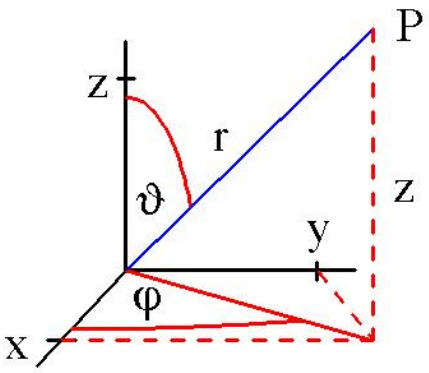
Tétel: A térbeli Descartes-koordinátákra való átszámítás.



$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$
$$z = h$$

Definíció: Gömbi koordináták.
A tér egy P pontjának gömbi koordinátái az (r, ϑ, φ) számhármas, ha az r a P pont origótól való távolsága, és így $r \geq 0$, ϑ a z-tengely pozitív fele és az origóból húzott, P-n átmenő félegyenes által bezárt szög, ezért $0 \leq \vartheta \leq \pi$, φ pedig a P pont xy-síkra való vetületének a polárkoordináták szerint kapott szöge, ami tehát $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Tétel: **A térbeli Descartes-koordinátákra való átszámítás.**



$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$$
$$z = r \cdot \cos\vartheta$$

3. Sík és térvektorok

Definíció: Vektor.
A síkban illetve a térben az **irányított szakaszok** osztályait **vektoroknak** nevezzük. Két irányított szakasz ugyanazt a vektort határozza meg (ugyanabban az osztályban vannak), ha az egyik a másikba **eltolással** átvihető.

Definíció: Helyvektor.
Az origóból induló, egy adott P pontba húzott irányított szakasz a P pont **helyvektora**.
Az origó helyvektorát **null-vektornak** nevezzük. Jele: $\mathbf{0}$.

A síkban az **x irányú egységvektor** $\mathbf{i} = (1{,}0)$, az **y irányú egységvektor** $\mathbf{j} = (0{,}1)$.

A térben az **x irányú egységvektor** $\mathbf{i} = (1{,}0{,}0)$, az **y irányú egységvektor** $\mathbf{j} = (0{,}1{,}0)$, az **z irányú egységvektor** $\mathbf{k} = (0{,}0{,}1)$

Tétel: Minden vektor egyértelműen azonosítható egy pont helyvektorával.

Definíció: Vektor műveletek.
A vektorok közt értelmezzük az **összeadást** és a valós **számmal (skalárral) való szorzást**. Az összeadást a paralelogramma szabály szerint kaphatjuk meg, a skalárral való szorzást pedig az (előjeles) nyújtással.

Tétel: Vektor műveletek koordinátákkal. Ha $\mathbf{a}\,(a_x, a_y)$ és $\mathbf{b}\,(b_x, b_y)$ két vektor a síkban λ pedig tetszőleges valós szám, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}\,(a_x + b_x, a_y + b_y), \qquad \lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}\,(\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y),$$

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j}\,.$$

Ha $\mathbf{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b}\,(b_x, b_y, b_z)$ két vektor a térben λ pedig tetszőleges valós szám, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}\,(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \qquad \lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}\,(\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z).$$

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}\,.$$

Tehát a Descartes-koordinátákban adott pontok helyvektorain a műveleteket koordinátánként kell elvégezni.

Definíció: Vektor hossza és szöge.
Az $\mathbf{a}\,(x, y, z)$ vektor **hossza**, $|\mathbf{a}\,|$, a megfelelő pont távolsága az origótól. Tehát a térben

$$|\mathbf{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Az $\mathbf{a}$ vektor **szöge** az origóból induló és a vektornak megfelelő ponton átmenő félegyenes és az x-tengely "pozitív fele" által meghatározott szög. A null-vektornak nincs szöge!

Két vektor által közbezárt szög a megfelelő félegyenesekkel meghatározott szög.

Definíció: Skaláris szorzat.
Két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ **skaláris szorzatán** vagy **skalárszorzatán** az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}\,| \cdot |\mathbf{b}\,| \cdot \cos\varphi$$

valós számot értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög. A skaláris szorzatot jelölik még

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} \quad \text{és} \quad \langle \mathbf{a}\,, \mathbf{b}\,\rangle$$

módon is.

Tehát a skaláris szorzat eredménye egy valós szám, nem pedig vektor!

Tétel: A skalárszorzat tulajdonságai.

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, a skaláris szorzat **kommutatív**,
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, a **skalár szorzó kiemelhető**,
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, a skaláris szorzat **disztributív**.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.
- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor **merőlegesek egymásra**, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- **A skaláris szorzat kiszámolása a síkban:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$
- **A skaláris szorzat kiszámolása a térben:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Definíció: Vektoriális szorzat.
Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két vektor a térben, akkor **vektoriális szorzatuk** az a $\mathbf{c}$ vektor, amelyre

- $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, itt $0 \le \varphi \le \pi$ a közbezárt szög,
- $\mathbf{c}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra,
- az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$ vektorok **jobbsodrású rendszert** alkotnak.

A vektoriális szorzat jele: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Tétel: A vektoriális szorzat tulajdonságai.

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, **antikommutatív**,
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, **disztributív**,
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, a **skalár szorzó kiemelhető**.
- Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat hossza a két vektor által kifeszített **paralelogramma területe**.
- Két vektor pontosan akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nulla.
- Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorú térbeli pontok pontosan akkor vannak rajta egy egyenesen, más szóval **kollineárisak**, ha $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$.
- **A vektoriális szorzat kiszámolása koordinátákkal:**
  ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

- **A vektoriális szorzat kiszámolása szimbolikus determinánssal (lásd determinánsok):**
  ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Definíció: Vegyes szorzat.
Három térbeli vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ **vegyes szorzata** az

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

valós szám.

Tétel: **A vegyes szorzat tulajdonságai.**

- $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = -\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}$
- $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,(\lambda\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$, a **skalár szorzó kiemelhető**.
- $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}$, **disztributív**.
- **A vegyes szorzat kiszámolása determinánssal (lásd determinánsok):**
  Ha $\mathbf{a}\,(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}\,(b_x, b_y, b_z)$ és $\mathbf{c}\,(c_x, c_y, c_z)$ a tér három vektora, akkor

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ helyvektorú térbeli pontok pontosan akkor vannak rajta egy síkon, más szóval **komplanárisak**, ha $(\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{c}-\mathbf{a})(\mathbf{d}-\mathbf{a}) = 0$.

4. Koordinátageometria

4.1. Síkbeli egyenesek

Tétel: A síkbeli egyenes egyenletei.

- **Az egyenes általános egyenlete.**

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{vagy} \quad Ax + By = D.$$

Itt A és B nem lehet egyszerre nulla, azaz

$$A^2 + B^2 \neq 0.$$

- **Egyenes megadása normálissal.**
Egy, az e egyenesre merőleges $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az egyenes **normálisának** nevezünk. Az $r_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{n}\,(n_x, n_y)$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0.$$

Tehát az általános egyenletben szereplő $(A; B)$ éppen egy normálvektort határoz meg.

- **Egyenes vektoregyenlete.**

$$\mathbf{n}\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{illetve} \quad \mathbf{n}\,\mathbf{r} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0,$$

ahol $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy tetszőleges normálisa.

Ha az egyenes **irányvektora** (az egyenessel párhuzamos irányú vektor) $\mathbf{v}\,(a, b)$, akkor az egyenes egy normálvektora

$$\mathbf{n}\,(-b, a).$$

- **Egyenes meghatározása iránytangenssel.**
Ha az egyenes **nem párhuzamos** az y-tengellyel, akkor az egyenlete

$$y = mx + b$$

alakban írható, ahol m az egyenes **iránytangense**, azaz az egyenes és az x-tengely által bezárt szög tangense, b pedig az egyenes által az y-tengelyből kimetszett szakasz előjeles hossza.

- **Az y-tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete.**
Ha az egyenes az x-tengelyt c-ben metszi és párhuzamos az y-tengellyel, akkor egyenlete:

$$x = c$$

- **Két ponton átmenő egyenes egyenlete.**
Ha $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ egy egyenes két különböző pontja és $x_1 \neq x_2$, azaz az egyenes nem párhuzamos az y-tengellyel, akkor egyenlete

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

- **Tengelymetszetes alak.**
  Ha az egyenes egyik koordináta tengellyel sem párhuzamos, akkor egyenlete

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

  alakban írható, ahol a az x-tengellyel, b pedig az y-tengellyel való metszet előjeles hossza.

4.2. Térbeli egyenesek

Tétel: A térbeli egyenesek egyenletei.

- **Egyenes paraméteres egyenlete.**
  A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v}\,(a; b; c)$ irányvektorú (az egyenessel párhuzamos irányú vektor) térbeli egyenes paraméteres alakja:

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct$$

  Itt t tetszőleges valós szám, a " **paraméter**". Vektor alakban, ha $\mathbf{r}\,(x, y, z)$ jelöli az egyenes egy tetszőleges pontját, $\mathbf{r}_0$ pedig a P pont helyvektora, akkor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$$

- **Egyenes egyenletrendszere.**
  Ha az $a,\ b,\ c$ számok közül egyik sem nulla, azaz $\mathbf{v}$ **egyik koordinátasíkkal sem párhuzamos**, akkor az **egyenes egyenletrendszere:**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

4.3. A síkok a térben

Tétel: A síkok egyenletei.

- **A sík általános egyenlete.**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{illetve} \quad Ax + By + Cz = E.$$

  Itt $A,\ B$ és C nem lehet egyszerre nulla, azaz

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

- **A sík vektoregyenlete.**
  Ha a sík egy pontjának helyvektora $\mathbf{r}_0$, egy **normálisa** (a síkra merőleges nem nulla vektor) pedig $\mathbf{n}$, akkor a **sík vektoregyenlete:**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{illetve} \quad \mathbf{n}\,\mathbf{r} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0.$$

  Tehát az általános egyenletben szereplő $(A; B; C)$ éppen egy normálvektort határoz meg.

Megjegyzés: Az egyenes illetve a sík normális vektorral megadott **vektoregyenletei** formálisan azonosak, de az egyik a sík vektorai, a másik a tér vektorai között ad meg egy összefüggést!

5. Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Három ismeretlenes egyenletrendszer

Definíció: Három ismeretlenes lineáris egyenletrendszer definíciója.
Az $x,\ y,\ z$ **ismeretlenekre** felírt

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{array}$$

egyenletrendszert **három ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek nevezünk.**
Itt az $a_{ij}, b_i : i = 1,2,3,\ j = 1,2,3$ adott valós számok. Az a_{ij} számokat az x, y, z **ismeretlenek együtthatóinak** nevezzük.

Az (a,b,c) számhármas a fenti egyenletrendszer egy **megoldása**, ha rendre x helyébe az a számot, y helyébe a b-t, z helyébe pedig c-t írva azonosságot kapunk.

Például, ha a három egyenlet három sík általános egyenletét adja meg, akkor az egyenletrendszer megoldásai azoknak a pontoknak a koordinátáit adják meg amelyek mind a három síkban benne vannak.

Egy ilyen egyenletrendszernek lehet pontosan egy megoldása (három általános helyzetű sík), végtelen sok megoldása (például egy egyenes minden pontja), de lehet, hogy egy megoldás sincs (például ha két sík párhuzamos a három közül).

Tétel: Az egyenletrendszer megoldásai nem változnak, ha

- két sort felcserélünk,
- az egyik egyenlet mindkét oldalát egy nem nulla számmal beszorzunk,
- az egyik egyenlet egy konstans-szorosát egy másikhoz hozzáadunk.

Tétel: Gauss elimináció.
Az itt felsorolt lépések egymásutáni alkalmazásával minden oszlopban egy kivételével kiejthetjük az oszlopban szereplő ismeretlent. Így végül a következő, az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kaphatjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} A_{11}x & + & A_{12}y & + & A_{13}z & = & B_1 \\ & & A_{22}y & + & A_{23}z & = & B_2 \\ & & & & A_{33}z & = & B_3 \end{array}$$

Az eljárás során, amit **Gauss-eliminációnak** nevezünk, az is feltehető, hogy az A_{11}, A_{22}, A_{33} számok mindegyike vagy 0, vagy 1. Most már könnyen megkaphatjuk az egyenletrendszer összes megoldását:

- Ha $A_{33} \neq 0$, akkor z egyértelműen kifejezhető a harmadik egyenletből.
- Ha $A_{33} = 0$ és $B_3 = 0$, akkor a z ismeretlen értéke tetszőleges lehet.
- Ha $A_{33} = 0$ és $B_3 \neq 0$, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldás.

Ha nem az utolsó eset következett be, akkor az első két egyenletet átrendezve, z helyébe egy lehetséges értéket írva, az

$$\begin{array}{ccccc} A_{11}x & + & A_{12}y & = & C_1 \\ & & A_{22}y & = & C_2 \end{array}$$

kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk. Az előzőekhez hasonlóan, most az y ismeretlent kaphatjuk meg, vagy ellentmondásra jutunk a második egyenletből. Végül már csak egy egyenlet marad, ha eddig nem volt ellentmondásos egyenlet (bal oldal nulla, jobb oldal nem nulla):

$$A_{11}x = D_1$$

Ennek megoldása már nem okozhat gondot.

5.2. Determinánsok

Definíció: Az ***n*-ed rendű determináns** $n \times n$ darab, négyzet alakban elrendezett számhoz rendel egyetlen számot. Jelölése:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Itt az $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ számokat a determináns **főátlójának** nevezzük.

Megjegyzés: A sok lehetséges hozzárendelés közül azt az egyet nevezzük determinánsnak, amelyre a következő tétel összes állítása teljesül. Annak belátása, hogy ez egyértelművé teszi a determináns definícióját, túl megy ennek a jegyzetnek a keretein.

Tétel: A determináns tulajdonságai.

- Ha a determináns egy sorát egy számmal megszorozzuk, értéke is ezzel a számmal szorzódig.
  – Speciális esetként, ha a determináns egy sorának minden eleme 0, akkor értéke is 0.
- Ha a determináns két sorát felcseréljük, az értéke (-1)-szeresére változik.
- A determináns értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk valamely másik sor szám-szorosát.
- A determináns értéke nem változik, ha a főátlóra tükrözzük az elemeit. Eszerint
  – minden szabály amit sorokra mondtunk ki érvényben marad oszlopokra is.
- Ha a D determináns főátlója alatt csupa 0 áll azaz $a_{ij} = 0$ ha $i > j$, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata, $D = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Mi egyelőre csak a másod és harmadrendű determinánsokkal foglalkozunk. Jegyezzük meg azért, hogy az elsőrendű determináns egyszerűen az az egyetlen szám, ami az 1×1-es táblázatban szerepel.

Tétel: A determináns kiszámolása.

- **Másodrendű determináns kiszámolása:**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Harmadrendű determináns kiszámolása:**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Definíció: **Egyenletrendszer determinánsai.**
Vizsgáljuk meg újra az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{array}$$

három ismeretlenes lineáris egyenletrendszert! Az egyenletrendszer együtthatóiból képzett

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

harmadrendű determinánst az **egyenletrendszer determinánsának nevezzük**. Még három determinánst kaphatunk, mégpedig úgy, hogy D egy-egy oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokkal. Tehát

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Tétel: **Cramer-szabály.**
A Cramer-szabály szerint a fenti egyenletnek pontosan akkor van egy és csak egy megoldása, ha $D \neq 0$, mégpedig

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy a Gauss-elimináció lényegesen kevesebb számolást igényel, mint a négy determináns kiszámolása!

6. Komplex számok

6.1. Komplex számok algebrai alakja

Definíció: Komplex számok definíciója, jelölések.

A komplex számok halmaza a **valós számkör** olyan **bővítése**, melyben elvégezhető a negatív számból való négyzetgyökvonás.

A **komplex számok halmazát** $\mathbb{C}$ betűvel jelöljük. **Imaginárius (képzetes) egységnek** az egyik olyan komplex számot nevezzük, amelynek a négyzete -1. Ennek jele i. Tehát $i^2 = -1$. A komplex számokat azonosíthatjuk az xy-sík pontjaival. Ekkor $1 = (1{,}0)$, $i = (0{,}1)$ és a sík egy tetszőleges (a, b) pontjának a $z = a + b \cdot i$ komplex számot feleltetjük meg. Eszerint a jelölés szerint a $z = a + b \cdot i$ kifejezést a z komplex szám **algebrai alakjának** nevezzük. Kényelmi okokból b és i sorrendje felcserélhető, illetve a $+$ jel helyett $-$ is írható, ha az eredeti jelölés szerint b negatív szám lenne. Például

$$1 + \sqrt{3} \cdot i = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{és} \quad 1 + (-2)i = 1 - 2i$$

kényelmesebb jelölést eredményez.

Ha $z = a + b \cdot i$ egy tetszőleges komplex szám, akkor ***z* valós része**

$$\operatorname{Re} z = a$$

képzetes (imaginárius) része pedig

$$\operatorname{Im} z = b$$

Az origónak megfelelő $0 + 0 \cdot i$ komplex számot továbbra is 0-val jelöljük.

6.2. Műveletek a komplex számok körében

Definíció: A művelek definíciója algebrai alakban.
Legyen $u = a + bi$ és $v = c + di$ két komplex szám.

- **Két komplex szám összege.**
$$u + v = (a + c) + (b + d)i$$
azaz összeadjuk a valós és képzetes részeket.

- **Két komplex szám szorzata.**
$$u \cdot v = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
Ez utóbbit úgy kaphatjuk meg, hogy a $(a + bi) \cdot (c + di)$ kifejezésben felbontjuk a zárójeleket és kihasználjuk, hogy $i \cdot i = -1$.

- **Komplex szám konjugáltja.**
$$\overline{u} = a - bi$$
jelöli az u komplex szám **konjugáltját**. Ez a megfelelő síkbeli pont x tengelyre való tükrözése.

- **Komplex szám hossza.**
$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
az u komplex szám **hosszát**. Ez éppen az u komplex számnak megfelelő helyvektor hossza.

  A műveletek alkalmazásával kapjuk, hogy

$$|u|^2 = u \cdot \overline{u}, \quad \text{azaz} \quad |u| = \sqrt{u \cdot \overline{u}}$$

- **Két komplex szám különbsége.**

$$u - v = u + (-1)v = (a - c) + (b - d)i$$

- **Komplex szám reciproka.**
  Ha $u \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{u} = \frac{\overline{u}}{|u|^2} = \frac{a}{|u|^2} - \frac{b}{|u|^2}i = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

- **Két komplex szám hányadosa.**
  Ha $v \neq 0$, akkor

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot \overline{v}}{v \cdot \overline{v}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

- **Gyökvonás.** Az u komplex számnak **négyzetgyöke** a $z = x + yi$ szám, ha

$$u = z^2 = (x + yi) \cdot (x + yi) = (x^2 - y^2) + 2xy \cdot i$$

  Eszerint a következő egyenletrendszert kapjuk x-re és y-ra:

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

  Ez mindig megoldható, és $u \neq 0$ esetén mindig pontosan két különböző megoldás van.

Tétel: A fenti műveletek tulajdonságai ugyanazok, mint amit a valós számoknál megszokhattunk. Ne feledjük azonban, hogy a komplex számok körében nincs rendezés, azaz nincs értelme megkérdezni, hogy melyik komplex szám nagyobb a másiknál.

6.3. Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció: **Trigonometrikus alak.** A sík pontjait polárkoordinátákkal is felírhatjuk. Ha $z = a + ib$ és a neki megfelelő **c** (a, b) síkvektor hossza $r = |z|$, szöge pedig φ, akkor

$$a = r \cdot \cos\varphi, \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

és így

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Ezt a kifejezést a z komplex szám **trigonometrikus alakjának** nevezzük.

Tétel: **A műveletek trigonometrikus alakban.**

- **Szorzási szabály.**
  A $z_1 = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $z_2 = r_2(\cos\psi + i\sin\psi)$ komplex számok szorzata trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)),$$

  azaz a hosszakat összeszorozzuk, a szögeket pedig összeadjuk.

- **Hatványozás.**
  Ha n egy egész szám, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,akkor

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

- **Moivre-képlet.**
  Az egység hosszú $(r = 1)$ komplex szám esetén kapjuk a Moivre-képletet:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

- **Gyökvonás.** A gyökvonás trigonometrikus alakban:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2} + k\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + k\pi))$$

  ahol $k = 0$ vagy $k = 1$ lehet.

- **Egész kitevős gyökök.**
  Ha n egy pozitív egész szám, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,akkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}))$$

  ahol $k = 0,1,\ldots,n-1$ lehet.

7. A függvény fogalma

Definíció: A függvény.

Ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor egy **A-ból B-be ható f függvény** az A halmaz minden eleméhez hozzárendeli a B halmaz egy elemét. A **függvény jele:**

$$f : A \to B$$

Ha a az A halmaz egy tetszőleges eleme, akkor $f(a)$ az f függvény **egyetlen értéke** az a-ban.

Ha a függvény által létesített hozzárendelés egyszerű, képlettel leírható, megengedett a függvény jelöléseként a képletet használni. Például

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$$

helyett elég x illetve $y = x$ jelölést használni. Hasonlóan továbbra is használhatjuk az x^2, $\sqrt{x}$ jelöléseket a megfelelő függvények megadására.

Definíció: Értelmezési tartomány, értékkészlet.

Az A halmazt az f függvény **értelmezési tartományának** nevezzük, jele D_f vagy $D(f)$.
A függvény **értékkészlete**,R_f vagy $R(f)$, a felvett értékek halmaza:

$$R_f = \{f(a) : a \in A\}$$

Az értékkészlet tehát része a B halmaznak, de nem feltétlen egyenlő vele.

Definíció: Függvények egyenlősége.

Két függvény f és g **pontosan akkor egyezik meg**, ha megegyezik az értelmezési tartományuk és a közös értelmezési tartomány minden pontjában ugyanazt az értéket veszik fel. Matematikai jelekkel:

$$D_f = D_g \quad \text{és} \quad \forall a \in D_f \; (f(a) = g(a))$$

Definíció: Grafikon.

Az f függvény grafikonja

$$\mathrm{graf}\, f = \{(a; f(a)) : a \in A\}$$

Az f függvény grafikonja tehát rendezett párokból áll és így része $A \times B$-nek, az A és B halmazok Descartes-szorzatának.

Definíció: Kompozíció. Ha f és g két függvény, akkor a $h = f \circ g$ **összetett függvény** értelmezési tartománya

$$D_h = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

és minden $x \in D_h$ esetén

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right).$$

Ha $h = f \circ g$, akkor az f az összetett függvény **külső függvénye**, és g a **belső függvénye**.

Megjegyzés:

Előfordulhat, hogy a fenti definíció esetén olyan h függvényt kapunk, amelyre $D_h = \emptyset$, azaz a függvény sehol sincs értelmezve. A továbbiakban ezt az „üres” függvényt (azonosítható az üres halmazzal) nem tekintjük függvénynek.

Definíció: Inverz függvény.

Azt mondjuk, hogy az $f : A \to B$ függvény **egy-egy értelmű** vagy **kölcsönösen egyértelmű** illetve **invertálható**, ha az f függvény különböző A-beli pontokhoz különböző értékeket rendel.

Azt mondjuk, hogy a g függvény az f egy-egy értelmű függvény **inverz függvénye**, vagy röviden **inverze**, ha

$D_g = R_f$;

$g(b) = a$ akkor és csak akkor, ha $f(a) = b$.

Egy függvénynek csak egy inverze lehet, ennek jele f^{-1}.

A fentiekből kiolvasható, hogy inverz inverze az eredeti függvény, azaz

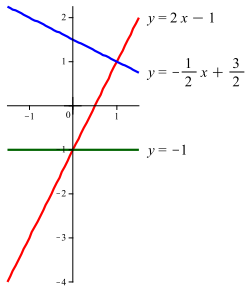
$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Ha A és B a valós számok egy részhalmaza,akkor az $f : A \to B$ függvényt **valós függvénynek** nevezzük. A továbbiakban függvényen, ha mást nem mondunk, valós függvényt értünk.

7.1. Néhány egyszerű függvénytípus

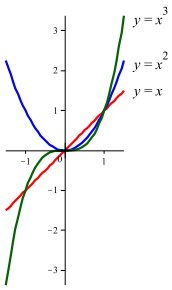
Definíció: Lineáris függvények.

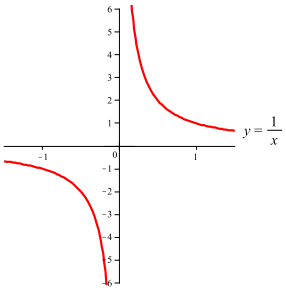
Az $f(x) = mx+b$ vagy $y = mx+b$ alakú függvényeket **lineáris függvényeknek** nevezzük. Itt m és b állandó. Az elnevezést az indokolja, hogy grafikonjuk a síkban egyenes. Itt m az egyenes **meredeksége**, b pedig az y tengellyel való metszéspontja az egyenesnek.
Abban a speciális esetben, amikor $m = 0$, azaz a függvény grafikonja egy vízszintes egyenes, **konstans függvényről** beszélünk.

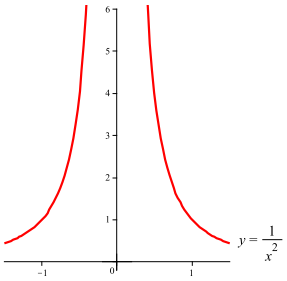


Definíció: Hatványfüggvények.

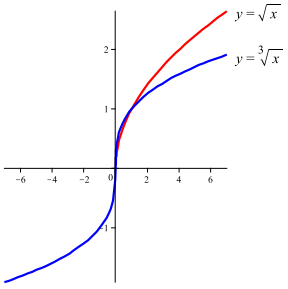
Az $f(x) = x^a$ vagy $y = x^a$ alakú függvényeket **hatványfüggvényeknek** nevezzük. Itt a egy állandó, a hatvány **kitevője**. Ha a kitevő egy pozitív egész szám, akkor a függvény értelmezési tartománya az egész számegyenes. Ha a kitevő negatív, akkor a függvény nincs értelmezve 0-ban.





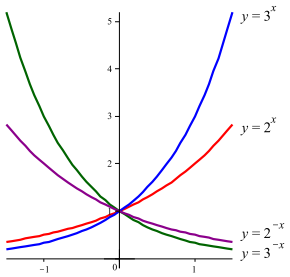


A **törtkitevőjű hatványfüggvények** közül különösen fontos az $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ **négyzetgyökfüggvény** és az $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ **köbgyökfüggvény**.
A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete a $[0, \infty)$ félegyenes, azaz a nemnegatív valós számok. A köbgyökfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete a $(-\infty, \infty)$ egyenes, azaz az összes valós szám.



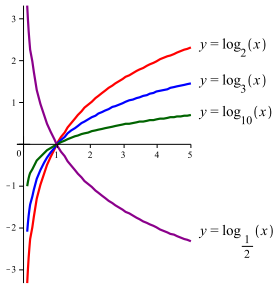
Definíció: Exponenciális függvények.

Az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket a-alapú **exponenciális függvényeknek** nevezzük. Itt az a alap csak pozitív, 1-től különböző szám lehet: $a > 0$ és $a \neq 1$. Az exponenciális függvények értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$, értékkészlete pedig $(0, \infty)$.



Definíció: Logaritmusfüggvények.

Az $f(x) = \log_a x$ alakú függvényeket a-alapú **logaritmusfüggvényeknek** nevezzük. Ezek az exponenciális függvények inverzei. Az alap itt is csak pozitív, 1-től különböző szám lehet: $a > 0$ és $a \neq 1$. A logaritmusfüggvények értelmezési tartománya $(0, \infty)$, értékkészlete pedig $(-\infty, \infty)$.



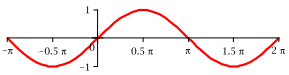
Definíció: Trigonometrikus függvények.

Az alábbi ábrákon a négy legismertebb trigonometrikus függvény grafikonja látható. Közülük a $\sin x$ és a $\cos x$ mindenütt értelmezve van, értékkészlete a $[-1,1]$ zárt intervallum és 2π szerint periodikus.

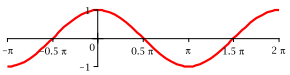
A $\operatorname{tg} x$ függvény nincs értelmezve ott, ahol a $\cos x$ függvény értéke 0, azaz az $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken, ahol k tetszőleges egész szám.

A $\operatorname{ctg} x$ függvény nincs értelmezve ott, ahol a $\sin x$ függvény értéke 0, azaz az $x = k\pi$ helyeken, ahol k tetszőleges egész szám.

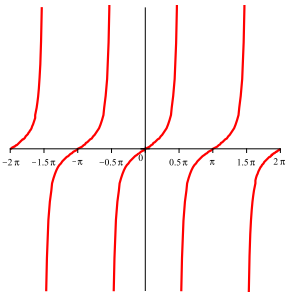
A $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvény értékkészlete $(-\infty, \infty)$ és π szerint periodikus.



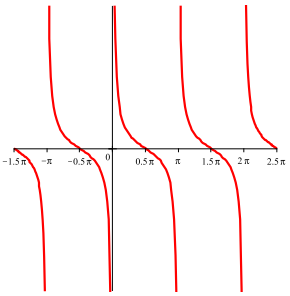
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{ctg} x$

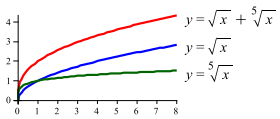
7.2. Műveletek függvényekkel

Definíció: Algebrai műveletek.

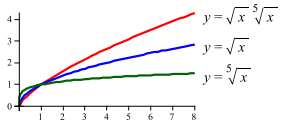
Ha $f(x)$ és $g(x)$ két valós függvény, c pedig tetszőleges valós szám, akkor

- $(cf)(x) = cf(x)$, $\quad D(cf) = D(f)$
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\quad D(f+g) = D(f) \cap D(g)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\quad D(f-g) = D(f) \cap D(g)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\quad D(fg) = D(f) \cap D(g)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\quad D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$

A függvények összegének és szorzatának grafikonja az alábbi ábrákon látható:



Két függvény összege

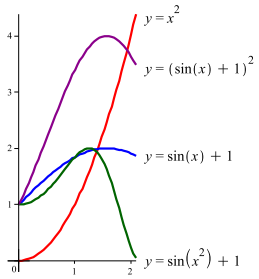


Két függvény szorzata

Definíció: Összetett függvény vagy **kompozíció.**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x), \quad D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$$

Az $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sin x + 1$, az $(f \circ g)(x) = (\sin x + 1)^2$ és a $(g \circ f)(x) = \sin(x^2) + 1$ függvények grafikonjai láthatóak az ábrán.

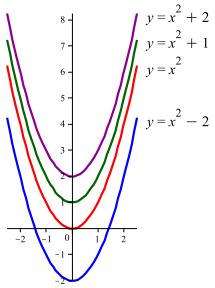


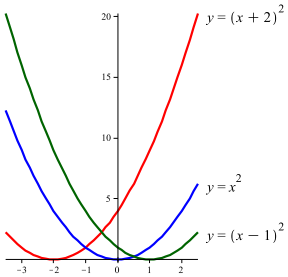
Függvények összetétele

7.3. Függvénytranszformáció

Függőleges eltolás:
Az $y = f(x) + c$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját felfelé tolja c-vel, ha $c > 0$ és lefelé $|c|$-vel, ha $c < 0$.

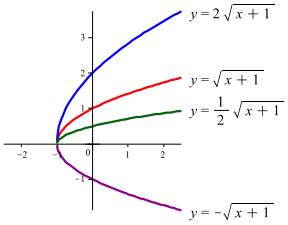
Vízszintes eltolás:
Az $y = f(x + c)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját balra tolja c-vel, ha $c > 0$ és jobbra $|c|$-vel, ha $c < 0$.

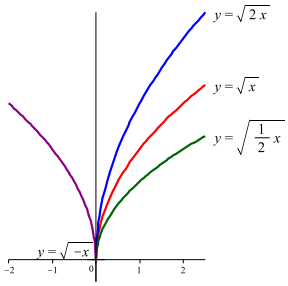




Függőleges nyújtás:
Az $y = cf(x)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját az y tengely irányában c-szeresére nyújtja, ha $c > 1$ és $1/c$-ed részére zsugorítja, ha $0 < c < 1$. Ha pedig $c = -1$, akkor tükrözi az x tengelyre.

Vízszintes nyújtás:
Az $y = f(cx)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját az x tengely irányában $1/c$-szeresére nyújtja, ha $0 < c < 1$ és c-ed részére zsugorítja, ha $c > 1$. Ha pedig $c = -1$, akkor tükrözi az y tengelyre.





8. Határérték, folytonosság

8.1. Függvény határértéke

Pillanatnyi sebesség.
Tekintsük az egyenesvonalú mozgást végző testet. Ha az adott t időpontban a helyzetét $s(t)$ jelöli, akkor a t_0 és t időpontok között az átlagsebessége $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$. Hogyan kaphatnánk meg a test pillanatnyi sebességét a t_0 időpontban? Nyilván minél kisebb a t és t_0 időpontok távolsága, az átlagsebesség annál jobban közelíti a pillanatnyi sebességet.

Síkgörbe érintője.
Szeretnénk meghatározni egy adott síkgörbe érintőjét a görbe egy adott $(a;b)$ pontjában. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a görbe egy $f(x)$ függvény grafikonja. Ekkor tehát $b=f(a)$. Ismerjük a keresett egyenes egy pontját, az érintési pontot, ezért elég megadnunk az érintő meredekségét. De hogyan? Megint szemléletesen elég nyilvánvaló, hogyha tekintjük a görbe egy másik $(x;f(x)$ pontját, akkor a két ponton át húzott húr meredeksége, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ annál jobban megközelíti az érintő meredekségét, minél kisebb a két pont távolsága.

Valójában mindkét esetben egy matematikai fogalom segítségével kaphatjuk meg a keresett számokat és ez a határérték fogalma.

Definíció: Környezet.
Legyen a egy pont a számegyenesen. Az $(a-\delta,a+\delta)$ alakú nyílt intervallumokat az ***a* szám környezeteinek** nevezzük.
Az $[a,a+\delta)$, illetve az $(a-\delta,a]$ alakú intervallumokat az a szám **jobb oldali** illetve **bal oldali környezetének** nevezzük.
Az a szám **pontozott környezetei** az $(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ alakú halmazok.
Az $(a,a+\delta)$, illetve az $(a-\delta,a)$ alakú (nyílt) intervallumokat az a szám **jobb oldali** illetve **bal oldali pontozott környezetének** nevezzük.
A **∞ környezeteinek** nevezzük a (K,∞) alakú félegyeneseket, ahol K tetszőleges valós szám.
A **-∞ környezeteinek** nevezzük a $(-\infty,K)$ alakú félegyeneseket, ahol K tetszőleges valós szám.

Definíció: Függvény határértéke.
Legyen f egy valós függvény, a pedig egy valós szám. Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke az *a* pontban a *b* valós szám**, ha a függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében és minden pozitív ε számhoz, található egy olyan pozitív δ szám, hogy $|f(x)-b|<\varepsilon$, ha $x\neq a$ és $|x-a|<\delta$, azaz

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\;(0<|x-a|<\delta\implies|f(x)-b|<\varepsilon).$$

A határértéket így jelöljük:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\qquad\text{illetve}\qquad f(x)\xrightarrow{x\to a}b.$$

Tétel: Műveleti szabályok.
Ha az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényeknek van határértéke az a pontban akkor

- az összeg függvénynek is van határértéke és

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x);$$

- a szorzat függvénynek is van határértéke és

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=(\lim_{x\to a}f(x))\cdot(\lim_{x\to a}g(x));$$

- a hányados függvénynek is van határértéke ha $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,és

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};$$

- ha $k \in \mathbb{N}^+$ egy rögzített pozitív egész, $f(x) \geq 0$ vagy k páratlan, akkor az f függvény k-adik gyökének is van határértéke és

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Tétel: Határérték és egyenlőtlenségek.
Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényeknek van határértéke az a pontban.

- Ha $f(x) \leq g(x)$ akkor $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, akkor $f(x) < g(x)$ az a pontnak egy pontozott környezetében.

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy a második állításban "$<$" helyett nem írhatunk "$\leq$"-t!

Tétel: Rendőr szabály.
Tegyük fel, hogy $f(x),\ g(x),\ h(x)$ értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében és itt minden x esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Ha most az $f(x)$ és $h(x)$ függvényeknek van határértéke az a pontban és ezek megegyeznek,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b,$$

akkor a közbezárt $g(x)$ függvénynek is van határértéke a-ban és

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Tétel: Helyettesítési szabály.
Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ és $x \neq a$ esetén $f(x) \neq b$ és $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, akkor

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Definíció: További határérték fogalmak.

- **A végtelen mint határérték.**
  – Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke az a pontban ∞**,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{illetve} \quad f(x) \xrightarrow{x\to a} \infty,$$

  ha minden K számhoz található egy $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) > K$ ha $x \neq a$ és $|x-a| < \delta$, azaz

$$\forall\, K\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > K).$$

  – Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke az a pontban $-\infty$**,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{illetve} \quad f(x) \xrightarrow{x\to a} -\infty,$$

  ha minden K számhoz található egy $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) < K$ ha $x \neq a$ és $|x-a| < \delta$, azaz

$$\forall\, K\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < K).$$

- **Jobb és baloldali határérték.**
  – Azt mondjuk, hogy az f függvény **jobboldali határértéke az a pontban b**,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \quad \text{illetve} \quad f(x) \xrightarrow{x\to a^+} b,$$

  ha a függvény értelmezve van az a pont egy jobboldali pontozott környezetében, és minden pozitív ε számhoz található egy $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$ ha $a < x < a + \delta$, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

  – Azt mondjuk, hogy az f függvény **baloldali határértéke az a pontban b**,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \quad \text{illetve} \quad f(x) \xrightarrow{x\to a^-} b,$$

  ha a függvény értelmezve van az a pont egy baloldali pontozott környezetében, és minden pozitív ε számhoz található egy $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$ ha $a - \delta < x < a$, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- **Határérték a végtelenben.**
  Azt mondjuk, hogy az f függvény **határértéke a ∞-ben a b valós szám**,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{illetve} \quad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} b,$$

  ha a függvény értelmezve van az ∞ egy környezetében,azaz egy (L, ∞) alakú félegyenesen és bárhogy megadva egy pozitív ε számot, található egy olyan K szám, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$ ha $x > K$ azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K\ \forall\, x\ (x > K \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$

- Hasonlóképpen definiálhatjuk azt is, hogy egy függvény határértéke a a-ban jobbról vagy balról illetve a végtelenben végtelen vagy mínusz végtelen és azt is, hogy egy függvény határértéke $-\infty$-ben $b,\ \infty,\ -\infty$.

Definíció: **Határérték általános definíciója.**
A fenti határérték fogalmak egy közös definícióban is megfogalmazhatók. Az f függvény határértéke az α helyen β ha f értelmezve van α egy (pontozott) környezetében és bárhogy választva β egy V környezetét, megadható az α egy U (pontozott) környezete úgy, hogy minden $x \in U,\ x \neq \alpha$ esetén $f(x) \in V$.

A különböző határérték fogalmak csak abban különböznek egymástól, hogy mit nevezünk α illetve β környezetének.

Tétel: **Kritikus határértékek.**
A határértékre vonatkozó műveleti szabályok legtöbbje kiterjeszthető azokra az esetekre is, amikor a függvények végtelenbe tartanak. A kivételes eseteket, amikor nincs érvényes szabály, **kritikus határértékeknek** nevezzük. Pontosabban megfogalmazva:

- Végtelen + véges = végtelen.
  Végtelen + végtelen = végtelen.
  $\infty + (-\infty)$: kritikus.

- Végtelenszer nem nulla = végtelen.
  Végtelenszer végtelen = végtelen.
  Végtelenszer nulla: kritikus.

- Végtelen per nem nulla = végtelen.
  Véges per végtelen = nulla.
  Végtelen per végtelen: kritikus.
  Nulla per nulla: kritikus.
  Nem nulla per nulla: végtelen, ha a nevező nem vált előjelet, egyébként kritikus.

8.2. Folytonos függvények

Definíció: A folytonosság definíciója.

- Azt mondjuk, hogy az **f függvény folytonos az a helyen**, ha a függvény értelmezve van az a pont egy környezetében, azaz
$$\exists\, \delta_0 > 0\ (a-\delta_0, a+\delta_0) \subset D_f,$$
és bárhogy megadva egy pozitív ε számot, található egy olyan pozitív δ, hogy $f(x)$ és $f(a)$ eltérése kisebb mint ε ha az x pont és az a távolsága kisebb mint δ, azaz
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (|x-a| < \delta \implies |f(x)-b| < \varepsilon).$$

- Azt mondjuk, hogy az f függvény **jobbról folytonos az a pontban**, ha a függvény értelmezve van az a pont egy jobboldali környezetében és minden pozitív ε számhoz megadható egy pozitív δ úgy, hogy $x \in\ x \in [a, a+\delta)$ esetén $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, azaz
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (a \le x < a+\delta \implies |f(x)-b| < \varepsilon).$$

- Azt mondjuk, hogy az f függvény **balról folytonos az a pontban**, ha a függvény értelmezve van az a pont egy baloldali környezetében és minden pozitív ε számhoz megadható egy pozitív δ úgy, hogy $x \in (a-\delta, a]$ esetén $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, azaz
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\ (a-\delta < x \le a \implies |f(x)-b| < \varepsilon).$$

Tétel: Határérték és folytonosság kapcsolata.

- Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az a pontban, ha az a pontban létezik a függvény határértéke és az megegyezik az $f(a)$ helyettesítési értékkel.

- Az f függvény akkor és csak akkor folytonos jobbról az a pontban, ha az a pontban létezik a függvény jobboldali határértéke és az megegyezik az $f(a)$ helyettesítési értékkel.

- Az f függvény akkor és csak akkor folytonos balról az a pontban, ha az a pontban létezik a függvény baloldali határértéke és az megegyezik az $f(a)$ helyettesítési értékkel.

Definíció: Szakadási pontok.
Ha egy függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében, de itt nem folytonos vagy nincs is értelmezve, akkor az a pontot az f függvény **szakadási pontjának** nevezzük.
Ha egy szakadási pontban a függvénynek mindkét oldalról van véges határértéke, akkor az a-t **elsőfajú szakadásnak** nevezzük.
Speciálisan ha az f-nek van véges határértéke a-ban (azaz a kétoldali határértékei megegyeznek és végesek) az a pontot **megszüntethető szakadásnak** nevezzük.
A nem elsőfajú szakadási helyeket **másodfajú szakadásoknak** vagy (elsősorban komplex függvények esetén) **lényeges szingularitásoknak** nevezzük.

Tétel: Műveleti szabályok.

- Folytonos függvények összege, különbsége és szorzata folytonos.

- Két folytonos függvény hányadosa folytonos, ha a nevező nem nulla.
- Folytonos függvények kompozíciója folytonos.

8.3. Zárt intervallumon folytonos függvények

Definíció: Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az [a,b] zárt intervallumon**, ha az (a, b) nyílt intervallum minden minden pontjában folytonos, a-ban jobbról b-ben pedig balról folytonos.

Tétel: Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.

- **Weierstrass tétele:** Zárt intervallumon folytonos függvénynek van legnagyobb értéke, azaz maximuma és van legkisebb értéke, azaz minimuma.
- **Bolzano tétele:** Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor a függvény $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz.
- **Inverz függvény folytonossága:** Zárt intervallumon folytonos és invertálható függvény értékkészlete egy zárt intervallum és ezen a függvény inverze folytonos.
- Egy zárt intervallumon folytonos függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton, azaz szigorúan nő (nagyobb helyen nagyobb értéket vesz fel) vagy szigorúan csökken.

Megjegyzés: A harmadik tételben az inverz értelmezési tartománya, ami az eredeti függvény értékkészlete, a Weierstrass-tétel és a Bolzano-tétel szerint az a zárt intervallum, amelynek bal végpontja a függvény minimuma, jobb végpontja pedig a függvény maximuma.

8.4. Elemi függvények

Tétel:

- **A konstans függvény mindenütt folytonos.**

  Bizonyítás: Legyen $f(x) \equiv c$, $a,\ \varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor választhatjuk a $\delta = 1$-et, hiszen

  $$|x - a| < \delta = 1 \quad \text{esetén} \quad |f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

- **Az x függvény mindenütt folytonos.**

  Bizonyítás: Legyen $f(x) \equiv x$, $a,\ \varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor választhatjuk a $\delta = \varepsilon$-et, hiszen

  $$|x - a| < \delta = \varepsilon \quad \text{esetén} \quad |f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

- **A polinomok mindenütt folytonosak.**
- **A racionális törtfüggvények** (két polinom hányadosa) **folytonosak** ott, ahol a nevező nem nulla.
- **A gyökfüggvények, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ... folytonosak** ott, ahol értelmezve vannak.

Definíció: Trigonometrikus függvények.

Legyen a síkban az origó körüli egységkör egy tetszőleges pontja a $P(c, s)$ pont, helyvektorának szöge pedig, szigorúan radiánban mérve, x. Ekkor a P pont koordinátáit, mint az x szög függvényeit

$(\cos x,\ \sin x)$-szel

jelöljük. Tehát $\cos x$ (**koszinusz x**) a pont első koordinátája, $\sin x$ (**szinusz x**) pedig a második.

Bevezetjük még a

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (**tangens x**), és $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (**kotangens x**)

függvényeket.

Tétel: **A trigonometrikus függvények tulajdonságai.**

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1$
- A $\sin x$ és a $\cos x$ függvény 2π szerint **periódusos**, azaz $\sin(x+2\pi) = \sin x$ és $\cos(x+2\pi) = \cos x$, a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ pedig π szerint periódusos.
- A $\sin x$ **páratlan**, azaz $\sin(-x) = -\sin x$, a $\cos x$ pedig **páros**, azaz $\cos(-x) = \cos x$.
- $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

Tétel: A megfelelő háromszögek és körcikkek területének összehasonlításából kaphatjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{esetén} \quad 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Tétel: A $\sin x$ és a $\cos x$ függvények mindenütt folytonosak. A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények folytonosak mindenütt, ahol értelmezve vannak.

Definíció: **Hatványozás, exponenciális függvény.**

Legyen a tetszőleges pozitív szám. Szeretnénk értelmezni tetszőleges x valós szám esetén az a szám (az alap) x-edik (a kitevő) hatványát, azaz az a^x függvényt.

Ha $a = 1$, akkor $a^x = 1^x = 1$ minden x-re.

Ha $0 < a < 1$, akkor a $b = \dfrac{1}{a}$ jelöléssel $a^x = b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$ lesz a hatvány értéke.

Elég tehát az $a > 1$ esetet megnéznünk.

A következő tulajdonságokat várjuk el az a^x függvénytől:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, az exponenciális függvény **multiplikatív**;
- $a^1 = a$;
- a^x **szigorúan monoton**, azaz egynél nagyobb alap esetén a nagyobb szám hatványa nagyobb, $a^x < a^y$ ha $x < y$.

Tétel: Könnyen látható, hogy már az első két tulajdonságból is következik, hogy

- $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n tényezős szorzat), ha n pozitív egész;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, ha n pozitív egész;
- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, ha p és q egész, $q \neq 0$.

Megjegyzés: Eszerint tehát racionális x esetén egyértelműen megkaphatjuk a^x értékét már az első két tulajdonságból. Könnyen látható az is, hogy legalábbis racionális kitevők esetén a harmadik, monotonitási feltétel is teljesül.

Tétel: **Az exponenciális függvény.**
Adott $a > 1$ esetén pontosan egy olyan a^x függvény van amelyik mindenütt értelmezve van és mindhárom

feltételnek eleget tesz. Ez a függvény mindenütt folytonos, értékei pozitívok és minden pozitív értéket felvesz.

Megjegyzés: Meg kell jegyezni, hogy ha a harmadik tulajdonságot vagy a vele ekvivalens folytonosságot nem követeljük meg az exponenciális függvénytől, akkor már számtalan olyan függvény van, amelyik eleget tesz a hatványozás algebrai tulajdonságainak.

Definíció: Euler-konstans, e^x.
Az exponenciális függvények között kitüntetett szerepet játszik az az eset, amikor az alap éppen e, az **Euler-konstans**, azaz az e^x függvény. Ez az e szám 2 és 3 közé esik, egyik lehetséges definíciója pedig az, hogy az exponenciális függvények közül egyedül a e^x függvényre teljesül a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

egyenlőség.

Tétel: Az exponenciális függvények viselkedése a végtelenben.
Ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad \text{sőt} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} = 0$$
$$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$$

Definíció: Hiperbolikus függvények.
Az e^x függvény segítségével definiálhatjuk a trigonometrikus függvények analógiáit, a **hiperbolikus függvényeket:**

- $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, **szinusz-hiperbolikusz x**,
- $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, **koszinusz-hiperbolikusz x**,
- $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, **tangens-hiperbolikusz x**

Az elnevezéseket a hasonló algebrai összefüggések indokolják. Ezek közül a leggyakrabban használt:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

A $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonját **láncgörbének** is nevezik, mert ez írja le egy ideális súlyos lánc alakját a gravitációs térben.

Definíció: Logaritmus függvény.
Ha $a > 0$ és $a \neq 1$ akkor az a^x függvény szigorúan monoton ezért invertálható. Mivel folytonos is és az értékkészlete az összes pozitív szám, definiálható az a^x függvény inverze, az **a alapú logaritmus** függvény. Ennek jele:

$$\log_a x$$

Ezek a függvények a pozitív számokon, azaz a $(0, \infty)$ nyílt félegyenesen vannak értelmezve.
Ha az alap éppen az e Euler-konstans, akkor **természetes alapú logaritmus** az elnevezés, és a függvényt így jelöljük:

$$\ln x \quad \text{illetve} \quad \log x$$

A **tízes alapú logaritmus** megszokott jele:

$$\lg x$$

Megjegyzés: Természetesen a hatványozás azonosságaiból levezethetőek a logaritmus azonosságai. Ezek közül a legfontosabb, hogy szorzat logaritmusa a logaritmusok összege, azaz

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

Nyomatékosan felhívom a figyelmet, hogy mint minden "függvény azonosság" ez is csak akkor érvényes, ha mind a két oldal értelmes ! Például két negatív szám szorzatának van logaritmusa, azaz a bal oldal értelmes, míg a jobb oldal nem értelmes.

Definíciók: A trigonometrikus függvények inverzei.

- A $\sin x$ függvény invertálható a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon, az inverz függvény jele $\arcsin x$.
- A $\cos x$ függvény invertálható a $[0, \pi]$ intervallumon, az inverz függvény jele $\arccos x$.
- A $\operatorname{tg} x$ függvény invertálható a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon, az inverz függvény jele $\operatorname{arctg} x$.
- A $\operatorname{ctg} x$ függvény invertálható a $(0, \pi)$ intervallumon, az inverz függvény jele $\operatorname{arcctg} x$.

9. Differenciálszámítás

9.1. A derivált fogalma

Definíciók:

- **Érintő egyenes.**
  Ha az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében és létezik és véges a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, akkor, az előbbi határértéket m-el jelölve, az m meredekségű az $(a, f(a))$ ponton átmenő egyenest az f függvény grafikonjának a pontbeli **érintőjének** nevezzük. Az érintő egyenlete tehát

$$y = m(x-a) + f(a), \qquad \text{ahol} \qquad m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- **A derivált definíciója.**
  Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény deriválható az a-ban és a deriváltja a b valós szám, ha létezik az $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **differencia-hányados** határértéke a-ban és az egyenlő b-vel, azaz

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$$

  Ezt a b értéket, az f függvény deriváltját vagy **differenciálhányadosát** a-ban $f'(a)$-val jelöljük. Szokásos jelölés még $\dfrac{df(a)}{dx}$
  A differencia-hányados határértékét szokás még

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

  alakban felírni.

- **Deriváltfüggvény.**
  Ha az f függvény egy intervallum minden pontjában deriválható, akkor beszélhetünk a függvény **deriváltfüggvényéről**. Ennek jele $f'(x)$ illetve $\dfrac{df}{dx}$.

- **Magasabb rendű deriváltak.**
  Azt mondjuk, hogy az f függvény **kétszer deriválható** az a pontban, ha deriválható egy, az a pontot tartalmazó intervallum minden pontjában és a deriváltfüggvénye deriválható az a-ban. Ekkor a második derivált definíciója
  $f''(a) = (f')'(a)$.
  Általában az ***f* függvény *k*-szor deriválható *a*-ban**, ha $k-1$-szer deriválható a egy környezetében és a $(k-1)$-edik deriváltfüggvény deriválható a-ban. Ekkor a k-adik derivált definíciója
  $f^{(k)}(a) = (f^{(k-1)})'(a)$.

Tétel: Ha egy függvény deriválható a-ban, akkor a-ban folytonos.

Az állítás **fordítva nem igaz**! Az $f(x) = |x|$ függvény 0-ban folytonos de 0-ban nem deriválható.

Tétel: Az f függvénynek pontosan akkor van érintője az a pontban ha a-ban deriválható. Ekkor az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

9.2. Deriválási szabályok

Tétel: Műveleti szabályok.
Ha f és g deriválható (a-ban) $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor

- $c \cdot f$ deriválható és
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$
- $f + g$ deriválható és
$$(f + g)' = f' + g'$$
- $f \cdot g$ deriválható és
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
- ha $g \neq 0$ akkor $\dfrac{f}{g}$ deriválható és
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Tétel: Láncszabály.
Ha g deriválható a-ban és f deriválható $g(a)$-ban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény deriválható a-ban és
$$(f \circ g)'(a) = (f' \circ g)(a) \cdot g'(a),$$
vagy másképp írva
$$f(g(a))' = f'(g(a))g'(a)$$

Tétel: Inverz függvény deriváltja.
Ha f invertálható az a pont egy környezetében, a-ban deriválható és $f'(a) \neq 0$, akkor az f inverze, f^{-1} deriválható a $b = f(a)$ pontban és
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Tétel: Elemi függvények deriváltja.

- Konstans függvény mindenütt deriválható és deriváltja nulla.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n pozitív egész.
- $(\sin x)' = \cos x$ és $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, ha $a > 0$.
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ és $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
- $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ha $x > 0$, α tetszőleges.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ha $x > 0$.
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ és $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tétel: L'Hospital szabály.
Tegyük fel, hogy f-nek és g-nek van határértéke a-ban (itt a végtelen is lehet) és vagy mindkét határérték 0 vagy mindkét határérték ∞, azaz a két függvény hányadosának határérték kritikus. Azt is tegyük fel hogy f és g deriválható a egy környezetében. Ekkor **ha létezik** a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, **akkor létezik** a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

9.3. Függvényvizsgálat

Definíciók:

- **Monoton függvények.**
  Az f függvény az $[a;b]$ intervallumon **monoton növekedő (csökkenő)**, ha
  $x, y \in [a;b],\ x < y$ esetén $f(x) \le f(y)$ illetve $f(x) \ge f(y)$.
  Ha itt az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor a függvény **szigorúan monoton növekedő (csökkenő)**.

- **Lokális szélsőérték.**
  Az f függvénynek a c pontban **lokális maximuma (minimuma)** van, ha megadható c körül egy nyílt intervallum, ahol a függvény értelmezve van és minden itteni pontban $f(x) \le f(c)$ illetve $f(x) \ge f(c)$, azaz

  $$\exists\delta > 0\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)\ f(x) \le f(c) \quad \text{illetve} \quad f(x) \ge f(c))$$

  Ha az $x = c$ esetet kivéve az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor c-ben **szigorú lokális maximum (minimum)** van.
  A lokális maximum illetve minimum közös elnevezése: **lokális szélsőérték**.

Tétel: Monotonitás és a derivált kapcsolata. Legyen az f függvény folytonos az $[a;b]$ zárt intervallumon és deriválható az $(a;b)$ nyílt intervallumon.

- **Ha** a függvény az $[a;b]$ intervallumon **monoton növekedő**, **akkor** $x \in (a;b)$ esetén $\boldsymbol{f'(x) \ge 0}$.
- **Ha** minden $x \in (a;b)$ esetén $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, **akkor** a függvény **szigorúan monoton növekedő**.

A monoton csökkenésről szóló tételeket az egyenlőtlenségek megfordításával kaphatjuk meg.

Tétel: A lokális szélsőértékek és a derivált kapcsolata.

- **Ha** f-nek c-ben **lokális szélsőértéke van** és itt deriválható, **akkor** $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.
- **Ha** f deriválható c egy környezetében és $\boldsymbol{f'(c) = 0}$ **és** $\boldsymbol{f'}$ **előjelet vált** $\boldsymbol{c}$**-ben**, **akkor** f-nek c-ben **lokális szélsőértéke van**. Pontosabban:
  ha $f'(x)$ c előtt pozitív, c után negatív, akkor c-ben szigorú maximum van;
  ha $f'(x)$ c előtt negatív, c után pozitív, akkor c-ben szigorú minimum van.
- **Ha** f kétszer deriválható c-ben és $\boldsymbol{f'(c) = 0}$ **és** $\boldsymbol{f''(c) < 0}$, **akkor** c-ben **szigorú maximum van**.
- **Ha** f kétszer deriválható c-ben és $\boldsymbol{f'(c) = 0}$ **és** $\boldsymbol{f''(c) > 0}$, **akkor** c-ben **szigorú minimum van**.

Tétel: Abszolút szélsőérték.
Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és deriválható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor abszolút maximuma vagy valamelyik végpontban (a-ban vagy b-ben), vagy az (a, b) nyílt intervallumban van és ez utóbbi esetben itt a derivált nulla, mert egyben lokális szélsőérték (lokális maximum) is.

Hasonló mondható el a függvény abszolút minimumáról is.

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy egy függvénynek lehet (abszolút) szélsőértéke úgy is, hogy a szélsőérték helyén a derivált nem nulla, tudniillik ha a szélsőérték a zárt intervallum valamelyik végpontjában van.

10. Többváltozós függvények

10.1. Folytonos függvények

Definíciók:

- **Távolság $\mathbb{R}^p$-ben.**
  $\mathbb{R}^p$, a **p dimenziós vektortér** pontjai közt értelmezhető egy **távolság** (az Euklideszi távolság) a következő módon: ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, \cdots, b_p)$ a tér két tetszőleges pontja, akkor a két pont távolsága

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_p - b_p)^2}$$

- **Pont környezete.**
  Ha $\mathbf{a}$ a p-dimenziós tér egy tetszőleges pontja és r pedig egy pozitív valós szám, akkor a

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

  halmazt az $\mathbf{a}$ pont körüli **r sugarú (nyílt) gömbnek**, vagy másképpen az $\mathbf{a}$ pont **r sugarú környezetének** nevezzük.

  Ha $p = 1$ (a számegyenes), akkor ez éppen a $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum, ha pedig $p = 2$, akkor a megfelelő nyílt körlap.

- **Grafikon, szintvonal.**
  Ha H a p dimenziós tér egy részhalmaza, $f : H \to \mathbb{R}$ egy H-n értelmezett valós értékű függvény, akkor f-et **p változós függvénynek** nevezzük. Az f **függvény értékeit** az $\mathbf{x}\,(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ pontban

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

  jelöli. A

$$\text{graf}\, f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in H\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

  halmazt a f függvény **grafikonjának** nevezzük. Ha $\mathbf{a} \in H = D_f$, akkor az

$$S(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in H : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$$

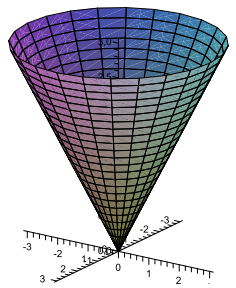
  halmazt az f függvény $\mathbf{a}$ ponthoz tartozó **szintvonalának** nevezzük.

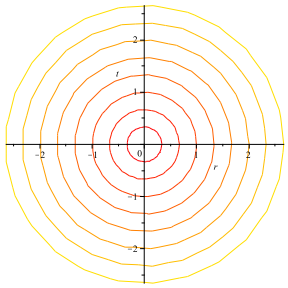
Tétel: **A távolság tulajdonságai.**
Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ esetén

- $|(\mathbf{a} - \mathbf{b})| \geq 0$ és csak az $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ esetben nulla,
- $|(\mathbf{a} - \mathbf{b})| = |(\mathbf{b} - \mathbf{a})|$, **a távolság szimmetrikus**,
- $|(\mathbf{a} - \mathbf{b})| + |(\mathbf{b} - \mathbf{c})| \geq |(\mathbf{a} - \mathbf{c})|$, **háromszög egyenlőtlenség**.

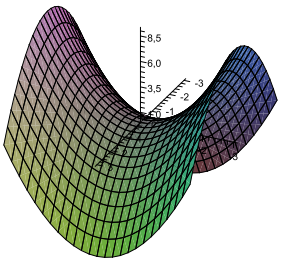
Megjegyzés: Ha f egy kétváltozós függvény, akkor grafikonja a térben egy felület, legalábbis, ha a függvény elég "sima". Így a grafikon nagyon szemléletes képet ad a függvényről. De akkor is sok információt kaphatunk a függvényről, ha különböző $\mathbf{a}$ pontokhoz tartozó szintvonalait megrajzoljuk.

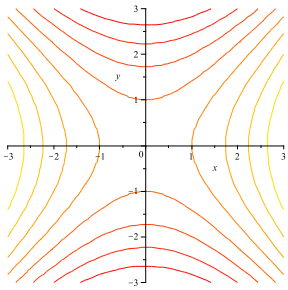
Például az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ esetén egyenes kúpot kapunk:





Ha pedig $f(x,y) = x^2 - y^2$, akkor egy úgynevezett nyeregfelületet kapunk:





Definíció: **Folytonosság definíciója.**
Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos** az $\mathbf{a}$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén megadható egy $\delta > 0$ úgy, hogy ha $\mathbf{x} \in D_f$ és $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, akkor $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in D_f\ (|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$$

Az **f függvény folytonos**, ha az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

Tétel: **A folytonosság definíciója környezetekkel.** Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az $\mathbf{a}$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén megadható egy $\delta > 0$ úgy, hogy az **a pont δ sugarú környezetének f szerinti képe része az $f(\mathbf{a})$ pont ε sugarú környezetének**, pontosabban:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f(B(\mathbf{a}, \delta) \cap D_f) \subset B(f(\mathbf{a}), \varepsilon)$$

10.2. Parciális derivált

Definíciók:

- **Parciális derivált definíciója.**
  Legyen f egy p változós függvény, amelyik értelmezve van az $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ pont egy környezetében. Jelölje még $\mathbf{e}_i$ az i-edik egységvektort, azaz azt a vektort, amelynek i-edik koordinátája 1 és az összes többi nulla. Azt mondjuk, hogy az f függvény **parciálisan deriválható** az $\mathbf{a}$ pontban az i-edik változó szerint, ha a $g(t) = f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{e}_i)$ egyváltozós függvény deriválható a 0-ban. Más szóval létezik és véges a
  $$\lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(\mathbf{a})}{t - a_i}$$
  Ekkor a $g'(0)$ értéket, az f függvény parciális deriváltját
  $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad f'_{x_i}(\mathbf{a}), \quad D_{x_i} f(\mathbf{a}), \quad D_i f(\mathbf{a})$$
  szimbólumok bármelyikével jelölhetjük. A két és három dimenzió esetén szokás még x_1 helyett x-et, x_2 helyett y-t és x_3 helyett z-t írni.

- **Gradiens.**
  Ha az f függvény minden változó szerint parciálisan deriválható, akkor a függvény gradiense a
  $$\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_p})$$
  vektor.

- **Folytonosan deriválható függvény.**
  Az f függvény az $\mathbf{a}$ pontban **folytonosan deriválható**, ha egy $\mathbf{a}$-környezet minden pontjában minden változó szerint parciálisan deriválható és az összes parciális derivált folytonos az $\mathbf{a}$ pontban.

Tétel: **Parciális derivált és folytonosság kapcsolata.**

- **Ha** egy függvény **parciálisan deriválható**, abból **nem következik**, hogy a függvény **folytonos**, például, ha
  $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{ha } (x;y) = (0;0) \end{cases},$$
  akkor f mindenütt, még az origóban is mindkét változója szerint parciálisan deriválható de az origóban nem folytonos:
  $$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 \quad \text{és ezért} \quad f'_x(0,0) = 0.$$
  Hasonlóan kapjuk, hogy $f'_x(0,0) = 0$. Másrészt, ha $x = y$ és $x \neq 0$ akkor $f(x,x) = 1$ és $f(0,0) = 0$. Így, mint az könnyen látható, a $\varepsilon = 1$-hez nincs "jó" δ az origóban.

- **Ha** egy függvény az $\mathbf{a}$ pontban **folytonosan deriválható** (ennél valamivel kevesebb feltétel is elég), **akkor** a függvény **folytonos** az $\mathbf{a}$ pontban.

Definíció: **Iránymenti derivált.**
Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ egy **egységvektor**. A $g(t) = f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v})$ egyváltozós függvény deriváltját a 0-ban (ha létezik) az f függvény $\mathbf{a}$ pontbeli $\mathbf{v}$ irányú **iránymenti deriváltjának** nevezzük, és
$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$-val vagy $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$-val jelöljük.

Tétel: **Ha** az f függvény **folytonosan deriválható** az $\mathbf{a}$ pontban, **akkor** minden $\mathbf{v}$ **irány szerint deriválható** és
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{v}\,.$$

Tétel: **Ha** az f függvény **folytonosan deriválható** az $\mathbf{a}$ pontban, **akkor** az iránymenti deriváltjai között **van egy leghosszabb** (legnagyobb abszolút értékű), mégpedig az amelyik a gradiens irányába mutat.

Megjegyzés: Az előző tétel azt mondja ki, hogy egy függvény a gradiens irányában változik leggyorsabban. Például két dimenzióban, ha a függvény grafikonját egy felületnek, a "domborzatot" leíró felületnek tekintjük, akkor a "hegymászás" ebben az irányban a legnehezebb, mert ebben az irányban a legmeredekebb a hegy.

10.3. Magasabb rendű parciális derivált

Definíciók:

- **Másodrendű parciális derivált definíciója.**
  Ha a $D_j f(\mathbf{x})$ parciális derivált létezik az $\mathbf{a}$ egy egész környezetében és az $\mathbf{a}$ pontban $D_j f(\mathbf{x})$ parciálisan deriválható az x_i változó szerint, akkor ezt a parciális deriváltat az f függvény $\mathbf{a}$-beli x_i, x_j változók szerinti **másodrendű parciális deriváltjának** nevezzük és a
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}), \quad f''_{x_i x_j}(a), \quad D_i D_j f(\mathbf{a}), \quad D_{ij} f(a)$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük.

- **Magasabb rendű parciális derivált definíciója.**
  Ha a $g(\mathbf{x}) = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(\mathbf{x})$ k-ad rendű parciális derivált létezik az $\mathbf{a}$ pont egy egész környezetében és az $\mathbf{a}$ pontban a $g(\mathbf{x})$ függvény parciálisan deriválható $\mathbf{a}$-ben az i-edik változó szerint, akkor ezt a parciális deriváltat az f függvény $\mathbf{a}$-beli $x_i, X_{i_1}, ...x_{i_k}$ változók szerinti **$k+1$-ed rendű parciális deriváltjának** nevezzük az és a

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}), \quad f^{(k+1)}_{x_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{a}), \quad D_i D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k}(\mathbf{a}), \quad D_{i i_1 i_2 \dots i_k} f(\mathbf{a})$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük.

Tétel: Young tétel.
Ha $D_i f$ és $D_j f$ parciális deriváltak (folytonosan) differenciálhatók $\mathbf{a}$-ben, akkor

$$D_{ij} f(\mathbf{a}) = D_{ji} f(\mathbf{a}).$$

Megjegyzés: A Young tétel azt mondja ki, hogy ha egy függvény másodrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor a másodrendű parciális deriváltak értékei nem függenek a parciális deriválás sorrendjétől.

11. Primitív függvény, határozatlan integrál

Gyakori feladat, hogy meg kell határozni egy függvényt, amelynek ismerjük a deriváltját. Ilyen feladat például a fizikában amikor a pillanatnyi sebesség ismeretében akarjuk meghatározni egy test mozgását.

Definíciók:

- **Primitív függvény.**
  Azt mondjuk, hogy a F függvény **primitív függvénye** a f függvénynek az (a, b) intervallumon, ha F deriválható (a, b)-ben és minden $x \in (a, b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.

- **Határozatlan integrál.**
  Az f függvény primitív függvényeinek összességét $\int f(x)\,dx$-szel vagy $\int f$-el illetve $\int f\,dx$-szel jelöljük és f **határozatlan integráljának** nevezzük. Tehát

$$\int f = \{F : F' = f\}$$

Tétel: Ha F primitív függvénye f-nek, akkor az $F + c$ alakú függvények, ahol c tetszőleges konstans, az f függvény összes primitív függvénye, azaz

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Megjegyzés: Nem minden függvénynek van primitív függvénye! Könnyen látható például, hogy a $\operatorname{sgn} x$ előjel függvénynek egyetlen olyan intervallumon sincs primitív függvénye, amelyik tartalmazza az $x = 0$ pontot.

Tétel: **Ha** f **folytonos** az (a, b) intervallumon, **akkor** f-nek **van primitív függvénye** ezen az intervallumon.

Tétel: **Alapintegrálok.**

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \quad (\alpha \neq 1) \qquad \int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$$

Tétel: **Integrálási szabályok.**

- **Műveleti szabályok.**
  Ha f-nek és g-nek van primitív függvénye, akkor $f + g$-nek és $c \cdot f$-nek is van, nevezetesen

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \qquad \int c \cdot f = c \int f$$

- **Lineáris helyettesítés.**
  Ha F primitív függvénye f-nek, akkor minden $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ esetén

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

- **Helyettesítés hatványfüggvénybe.**
  Ha f deriválható és mindenütt pozitív, akkor

$$\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

- **Parciális integrálás.**
  Ha f és g deriválható és fg'-nek van primitív függvénye, akkor $f'g$-nek is, és

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

- **Integrálás helyettesítéssel.** Ha $g(x)$ deriválható, $f(y)$ értelmezve van $g(x)$ értékkészletén és itt f-nek van primitív függvénye, akkor az $f(g(x)) \cdot g'(x)$ összetett függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

  ahol $F(y)$ az $f(y)$ függvény egyik primitív függvénye.

12. Határozott integrál

Néhány, a határozott integrál fogalmára vezető probléma.

A függvénygrafikon alatti terület.
A munka értelmezése és kiszámítása.
A nyomóerő meghatározása.

12.1. A határozott integrál definíciója

Definíciók:

- **Felosztás.**
  Az $[a, b]$ zárt intervallum egy **felosztásán** olyan $F = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ sorozatot értünk, amelyre
  $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
  Az x_i pontot a felosztás i-edik **osztópontjának**, az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumot pedig a felosztás i-edik **részintervallumának** nevezzük.

- **Felosztás finomsága.**
  Ha $F = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak akkor a $d(F) = \max\{(x_i - x_{i-1}) : : i = 1, \ldots, n\}$ (pozitív) szám az F felosztás **finomsága**. Más szóval az F finomsága a leghosszabb részintervallum hossza.

  Azt mondjuk, hogy az F felosztás δ-nál finomabb, ha $d(F) < \delta$.

- **Integrálközelítő összeg.**
  Legyen $F = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. A $K = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ sorozatot az F felosztáshoz tartozó **közbenső helyeknek** nevezzük, ha $1 \leq i \leq n$ esetén $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$.
  Ha f egy korlátos függvény $[a, b]$-n, akkor az
  $$\sigma_{F,K} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$
  összeget az f függvény F felosztásához és K közbenső helyekhez tartozó **integrál közelítő összegének** vagy röviden **közelítő összegének** nevezzük.
  Ha nem okoz félreértést, akkor a közbenső helyekre utaló K jelölést elhagyhatjuk és röviden σ_F-et írunk.

  Ez az összeg felel meg például annak a munka kiszámolására használt szemléletes módszernek, amikor az erőt szakaszonként konstansnak vesszük.

- **Riemann-integrál.**
  Legyen f az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény.
  Azt mondjuk, hogy a függvény **Riemann-integrálható** (röviden integrálható) az $[a, b]$ zárt intervallumon és **integrálja az *I* szám**, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb F felosztásra és bármely F-hez tartozó σ_F közelítő összegre $|\sigma_F - I| < \varepsilon$, azaz
  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall F \text{ felosztás esetén } (d(F) < \delta \implies |\sigma_F - I| < \varepsilon)$$
  Ezt az I számot az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó **határozott integráljának** (vagy **Riemann-integráljának**) nevezzük és $\int_a^b f(x)\,dx$-el jelöljük.

Tétel: Legyen $f \equiv c$ konstans az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor tetszőleges F felosztás esetén $\sigma_F = c(b - a)$, és így f integrálható és

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a).$$

Másrészt legyen $D(x)$ a Dirichlet-függvényt, azaz az a függvény amelyik a racionális helyeken 1, az irracionális helyeken pedig 0. Ekkor tetszőleges $[a, b]$ intervallum F felosztása esetén választhatunk csupa racionális illetve irracionális számból álló K_r és K_i közbenső helyeket. Ez abból a nevezetes tételből a következik, hogy minden (nyílt) intervallum tartalmaz racionális számot és irracionális számot is. Ezekkel felírva a közelítő összegeket

$$\sigma_{F,K_r} = b - a, \qquad \sigma_{F,K_i} = 0.$$

Eszerint tehát a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem integrálható.

12.2. A határozott integrál tulajdonságai

Tétel:

- Ha egy függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor minden $[c, d] \subset [a, b]$ részintervallumon is integrálható.
- Ha f integrálható $[a, b]$-n és $[b, c]$-n is , akkor $[a, c]$-n is és

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

  azaz egymáshoz csatlakozó intervallumokon az integrál additív.
- Minden monoton függvény és minden folytonos függvény integrálható.
- Ha egy integrálható függvényt véges sok helyen megváltoztatok, akkor integrálható marad és az integrál értéke sem változik meg.
- Ha az f és g függvények integrálhatóak az $[a, b]$ intervallumon, c pedig egy tetszőleges valós szám, akkor $f + g$ és $c \cdot f$ is integrálható és

$$\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

12.3. A Riemann-integrál kiszámítása

Tétel: **Newton-Leibniz formula.**
Ha f integrálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, F primitív függvénye f-nek az (a, b) nyílt intervallumon és F folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

azaz az integrál megegyezik a primitív függvény megváltozásával.

Megjegyzés: A határozatlan és a határozott integrálról eddig mondottak szerint minden folytonos függvény integrálja kiszámítható a Newton-Leibniz formula segítségével. Persze csak akkor, ha az adott folytonos függvénynek ki tudjuk számolni a primitív függvényeit. Sajnos könnyen előfordulhat, hogy nem így van, például az e^{x^2} függvény ugyan folytonos, de a primitív függvénye nem elemi függvény, azaz nem fejezhető ki az eddig megismert függvények segítségével. A primitív függvény keresésénél megismert módszerekkel (parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel) és a Newton-Leibniz formula segítségével számoljuk ki általában a határozott integrálokat. De sok esetben az oda és vissza helyettesítés egyikétől megszabadulhatunk, ha nem csak a függvény alakítjuk át a helyettesítéses integrálban, hanem az integrál határait is.

Tétel: Integrál transzformáció.
Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, $g : [c, d] \to [a, b]$ folytonosan deriválható függvény és $g(c) = a$ és $g(d) = b$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Megjegyzés: A fenti képlet előnye, hogy nem kell ismernünk a g helyettesítő függvény inverzét, elég ha a c és d pontokat meghatározzuk.

Néha szigorúan csökkenő helyettesítést szeretnénk alkalmazni. Ilyenkor $g(c) = b$ és $g(d) = a$, azaz a "határok" felcserélődnek. Hogy ezt a problémát megszüntessük, újra definiáljuk a határozott integrált, ha az integrálás "alsó" határa nagyobb vagy egyenlő az integrálás "felső" határánál:

Definíció: $\displaystyle\int_a^a f = 0, \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$

13. A határozott integrál alkalmazásai

13.1. A terület és térfogat, ívhossz.

Definíció: Terület és térfogat.
A sík bizonyos **korlátos részeihez, síkidomokhoz** egy mérőszámot rendelhetünk, a **területet.** Ehhez hasonlóan a tér bizonyos korlátos részeihez, **testekhez** rendelhetjük a **térfogatot**. Közös nevük **mérték**, pontosabban **Jordan-mérték**. A terület illetve a térfogat pontos meghatározására csak később kerül sor. Ha egy A halmazhoz sikerült mértéket rendelni, akkor az A halmazt (Jordan) **mérhetőnek** nevezzük és a mértékét $t(A)$-val jelöljük.

A mérték legfontosabb tulajdonságai.

- A mérték **nem negatív**, azaz minden mérhető A esetén $t(A) \geq 0$.
- Ha A és B két mérhető halmaz és $A \subset B$, akkor $t(A) \leq t(B)$, azaz a mérték **monoton**.
- Ha A és B két **diszjunkt** mérhető halmaz, akkor $A \cup B$ is mérhető és $t(A \cup B) = t(A) + t(B)$, azaz a mérték **additív**.
- Ha két halmaz **egybevágó**, akkor mértékük **megegyezik**.
- Az **egységnégyzet (térben az egységkocka)** mértéke 1.

Tétel: Nem minden korlátos halmaznak van területe illetve térfogata. A fenti tulajdonságokból viszont könnyen adódik, hogy a **téglalap területe $T = a \cdot b$** illetve egy **téglatest térfogata $V = a \cdot b \cdot c$**, ahol a, b, c az oldalak hosszát jelöli.

Tétel: Területszámítás.

- **Függvénygörbe alatti terület.**
  Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, amelyre $f(x) \geq 0$, ha $x \in [a, b]$. Ekkor az
  $$A = \{(x; y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$
  síkidomnak van területe és
  $$t(A) = \int_a^b f(x)\, dx$$
- **Normáltartomány területe.**
  Az előzőnél általánosabb típusú síkidom a **normáltartomány:**
  Ha f és g két integrálható függvény $[a, b]$-n, amelyekre $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \geq f(x)$, akkor a
  $$N = \{(x; y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
  normáltartománynak van területe és
  $$t(N) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$
  Például az R sugarú origó középpontú kör is normáltartomány, ahol
  $$g(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2},\ -R \leq x \leq R.$$
  Erre alkalmazva a fenti képletet, megkapjuk a kör területét, πR^2-et.

Definíció: Függvénygrafikon ívhossza.
A síkban egy görbéhez, az egyszerűség kedvéért egy függvény grafikonjához hozzárendelhetjük a görbe hosszát, ha a görbe elég "sima". Ha egy görbének van ívhossza, a görbét **rektifikálhatónak** nevezzük. Nyilván egy poligon ívhossza a poligont alkotó szakaszok hosszának összege kell, hogy legyen. Felhasználva, hogy két pont között legrövidebb út az egyenes, egy görbe ívhossza nem lehet kisebb mint egy olyan poligoné, amelynek csúcsai a görbén fekszenek és a csúcsok sorrendje megfelel a görbe "irányításának". Az ilyen poligonokat **beírt poligonoknak** nevezzük. Azt a legkisebb számot, amelyik minden beírt poligon hosszánál nagyobb vagy egyenlő, a görbe **ívhosszának** nevezzük.

Tétel: Az ívhossz kiszámolása. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, akkor a grafikonjának van ívhossza és

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Tétel: Forgástest térfogata. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, amelyre $f(x) \geq 0$, ha $x \in [a, b]$. Ekkor a

$$A = \left\{(x; y; z) : a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\right\}$$

forgástest mérhető és a test térfogata

$$t(A) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$$

13.2. Improprius integrál

Az eddigi integrálfogalom, a Riemann-integrál csak korlátos zárt intervallumon értelmezett korlátos függvények esetén volt értelmezhető. Hogy ezeket a megszorításokat részben megkerülhessük, bevezetjük az **improprius integrál** fogalmát.

Definíciók:

- **Improprius integrál félegyenesen.**
  Legyen f értelmezve az $[a, \infty)$ zárt félegyenesen és minden $b > a$ esetén f integrálható $[a, b]$-n. Amennyiben létezik a

  $$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = I$$

  határérték és véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **improprius (nem valódi) integrálja az $[a, \infty)$ félegyenesen konvergens és értéke I**. Ezt úgy jelöljük, hogy

  $$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

  Ha a fenti határérték nem létezik vagy nem véges, az **improprius integrál divergens**.

  Hasonlóan értelmezhetjük az $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ improprius integrált abban az esetben, ha f integrálható $[b, a]$ intervallumon minden $b < a$ esetén. Ekkor

  $$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\, dx$$

- **Improprius integrál korlátos intervallumon.**
  Legyen f értelmezve az $[a, b)$ intervallumon és $a < c < b$ esetén f integrálható $[a, c]$-n. Amennyiben létezik a
  $$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\, dx = I$$
  határérték és véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **improprius integrálja az $[a, b]$ intervallumon konvergens és értéke I**. Ezt úgy jelöljük, hogy
  $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\, dx$$
  Ha a fenti határérték nem létezik vagy nem véges, az **improprius integrál divergens**.

  Hasonlóan értelmezhetjük az $\int_a^b f(x)\, dx$ improprius integrált abban az esetben, ha f integrálható $[c, b]$ intervallumon minden $a < c < b$ esetén. Ekkor
  $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)\, dx$$

Megjegyzés: Ha az f függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ akkor az $\int_a^b f(x)\, dx$ kifejezés három számot is jelöl egyszerre: a közönséges integrált és a kétféle improprius integrált. Szerencsére ebben az esetben a három szám **megegyezik.**

Tétel: Az improprius integrál kiszámolása.
Tegyük fel, hogy az f függvénynek van primitív függvénye az $[a, \infty)$ félegyenesen, legyen ez F, és f integrálható minden valódi zárt részintervallumon. Az improprius integrál az $[a, \infty)$ félegyenesen akkor és csak akkor konvergens, ha F-nek van határértéke ∞-ben és ez véges. Ekkor
$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x \to \infty} F(x) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^\infty = F(\infty) - F(a)$$

Hasonló formulát kaphatunk a többi esetben is:
$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \big[F(x)\big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$
itt α és β lehet végtelen is, és a primitív függvény "helyettesítési értéke" itt a megfelelő oldalról vett határértéket jelöl.

Megjegyzés: Bár elég gyakori, hogy egy improprius integrált nem tudunk kiszámolni, de van néhány módszer, aminek segítségével eldönthetjük azt, hogy az improprius integrál konvergens vagy divergens.

Definíció: Abszolút konvergencia.
Az $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ improprius integrál (itt α vagy β végtelen is lehet) **abszolút konvergens**, ha az $\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx$ improprius integrál konvergens.

Tétel: **Ha** egy improprius integrál **abszolút konvergens, akkor konvergens** is.

Megjegyzés: Ez az állítás nem megfordítható, van olyan improprius integrál, például

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.

Tétel:

– **Majorizációs-elv.**

Ha f és g integrálható $[\alpha,\beta)$ minden korlátos zárt részintervallumán és $x \in [\alpha,\beta)$ esetén $|f(x)| \le g(x)$ és $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ is (abszolút) konvergens.

– **Minorizációs-elv.**

Ha pedig $x \in [\alpha,\beta)$ esetén $0 \le f(x) \le g(x)$ és $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ divergens, akkor $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ is divergens.

– A két állítást együtt **összehasonlító kritériumnak** is szokás nevezni.

II. rész

Második félév

14. Többváltozós függvények integrálása

14.1. Integrálás téglán

A továbbiakban egy síkbeli zárt téglalapot illetve egy térbeli zárt téglatestet **téglának** nevezünk, ha az élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

Tehát a síkban a $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ alakú halmazok, a térben pedig a $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ alakú halmazok a **téglák**.

A továbbiakban csak a síkbeli definíciókat mondjuk ki részletesen, a térben ezek értelemszerűen kiterjeszthetők.

A síkbeli $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ **tégla belseje** a $T = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ nyílt tégla. Két tégla **egymásba nem nyúló**, ha a belsejüknek nincs közös pontja, azaz a belsejük diszjunkt.

A T tégla **területét** vagy **mértékét** a

$$t(T) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

szám jelöli.

Legyen $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ egy síkbeli tégla, $F_x = \{a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1\}$ az $[a_1, b_1]$ intervallum egy felosztása, $F_y = \{a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2\}$ pedig a $[a_2, b_2]$ intervallum egy felosztása. Ekkor az

$$F = \{(x_i; y_j) : i = 0,1, \ldots, n;\ j = 0,1, \ldots, m\}$$

halmazt a T tégla egy **felosztásának** nevezzük.

Adott $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ esetén a $Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ téglát az F felosztáshoz tartozó **(elemi) rácstéglának** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az összes elemi rácstégla páronként egymásba nem nyúló téglarendszert alkot.

Egy Q tégla **átmérőjét** (az átló hosszát) $d(Q)$ jelöli.
Tetszőleges $F = \{(x_i; y_j) : i = 0,1, \ldots, n;\ j = 0,1, \ldots, m\}$ felosztás esetén az F felosztás **finomsága**

$$d(F) = \max\{d(Q_{i,j}) : i = 1,2, \ldots, n;\ j = 1,2, \ldots, m\}.$$

Azt mondjuk, hogy az F felosztás **finomabb** mint a δ pozitív szám, ha

$$d(F) < \delta.$$

Az $K = \{(c_i, d_j) : i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\}$ halmazt az $F = \{(x_i; y_j) : i = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m\}$ felosztáshoz tartozó **közbenső helyeknek** nevezzük, ha minden $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$ esetén $(c_i, d_j) \in Q_{i,j}$, azaz $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ és $y_{j-1} \le d_j \le y_j$

Legyen f a T téglán értelmezett **korlátos függvény**. $F = \{(x_i; y_j) : i = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m\}$ egy felosztás T-n, K pedig az F felosztáshoz tartozó közbenső helyek. Ekkor a

$$\sigma_{F,K} = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} f(c_i, d_j) t(Q_{i,j})$$

számot az f függvény F felosztásához és K közbenső helyekhez tartozó **integrál közelítő összegének** vagy röviden **közelítő összegének** nevezzük.
Ha nem okoz félreértést, akkor a közbenső helyekre utaló K jelölést elhagyhatjuk és röviden σ_F-et írunk.

Definíció: Az integrál definíciója téglán.
Azt mondjuk, hogy a korlátos f függvény **Riemann-integrálható** vagy röviden **integrálható** a T téglán és

az integrálja az I szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb F felosztásra és bármely F-hez tartozó σ_F közelítő összegre

$$|\sigma_F - I| < \varepsilon.$$

Ezt az I számot az f függvény T téglán vett **integráljának** (vagy **Riemann-integráljának**) nevezzük. Jelölése

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{vagy} \quad \iint\limits_T f.$$

14.2. Integrálás korlátos halmazon

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **zárt halmaz**, ha bármely p pontra, amelyik nincs az A halmazban, megadható egy, a p pontot tartalmazó körlap (gömb), amelyik nem metszi az A halmazt.

Könnyen látható, hogy minden zárt tégla zárt halmaz.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **nyílt halmaz**, ha bármely $p \in A$ pontra megadható egy, a p pontot tartalmazó körlap (gömb), amelyik része az A halmaznak.

Az előző két definíciót összevetve:
Egy A halmaz akkor és csak akkor zárt halmaz, ha a komplementere nyílt halmaz.

Definíció: Az integrál definíciója korlátos halmazon.
Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos halmaz, f pedig egy korlátos függvény, amelyik értelmezve van az A halmazon. Mivel A korlátos halmaz, megadható egy T tégla úgy, hogy $A \subset T$. Legyen

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x;y) \in A \\ 0 & (x;y) \notin A \end{cases}.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény **integrálható az A halmazon**, ha g integrálható a T téglán. Ekkor az integrál értéke az $\iint\limits_A f = \iint\limits_T g$ szám.

Megjegyzés: Természetesen ahhoz, hogy a fenti definíció értelmes legyen, be kell látni, hogy az nem függ a T tégla megválasztásától. Ez könnyen belátható, legalább is a síkban.

Definíció: Mérhető halmaz.
Azt mondjuk, hogy a A korlátos halmaz **mérhető (Jordan-mérhető)**, ha az azonosan 1 függvény integrálható az A halmazon. Ekkor az A halmaz területe

$$t(A) = \iint\limits_A 1.$$

Tétel: Minden korlátos és konvex halmaz mérhető.

Megjegyzés: Az síkbeli integrál fenti definíciói és jelölései nyilvánvaló módon általánosíthatók a háromdimenziós Euklideszi térben. Ennek megfelelően ha $A \subset \mathbb{R}^3$ egy korlátos halmaz, f pedig egy rajta értelmezett integrálható függvény, akkor az f függvény integrálját az A halmazon

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

jelöli.

14.3. Az integrál kiszámolása, alkalmazásai.

Az egymásba nem nyúló téglák mintájára azt mondjuk, hogy az **A és B halmaz egymásba nem nyúló**, ha a metszetük nem tartalmaz valódi körlapot (a térben gömböt).

Tétel: Az integrál alaptulajdonságai.

- Ha A és B két korlátos egymásba nem nyúló halmaz és f integrálható A-n és B-n is, akkor f integrálható a $C = A \cup B$ halmazon és

$$\iint\limits_C f = \iint\limits_A f + \iint\limits_B f.$$

- Két egymásba nem nyúló mérhető halmaz uniója mérhető és az unió mértéke a két mérték összege.
- Ha A egy zárt mérhető halmaz, f egy A-n értelmezett folytonos függvény, akkor f integrálható az A halmazon. Tehát egy zárt téglán folytonos függvény integrálható.
- Ha f és g integrálható az A halmazon c pedig egy tetszőleges valós szám, akkor $f + g$ és $c \cdot f$ is integrálható és

$$\iint\limits_A (f+g) = \iint\limits_A f + \iint\limits_A g, \qquad \iint\limits_A (c \cdot f) = c \iint\limits_A f.$$

Tétel: Az integrál kiszámolása.

- **Szukcesszív integrálás:**
  Legyen f integrálható a $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ téglán. Ekkor

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy$$

  illetve

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

  Hasonlóan ha f integrálható a $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ téglán, akkor

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a_3}^{b_3} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy \right) dz.$$

- **Integrálás normáltartományon:**
  Legyen φ és ψ két egyváltozós függvény, amelyek integrálhatók az $[a, b]$ zárt intervallumon és $x \in [a, b]$ esetén $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Ekkor az

$$N = \{(x; y) : x \in [a, b]; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

  normáltartomány mérhető és ha φ és ψ folytonos, akkor N zárt halmaz. Legyen továbbá f egy korlátos kétváltozós függvény, amelyik integrálható N-en. Ekkor

$$\iint\limits_N f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

- **Integrálás körlapon:**
  Ha K egy tetszőleges R sugarú, (x_0, y_0) középpontú körlap a síkban f pedig folytonos kétváltozós függvény ezen a K körlapon, akkor

$$\iint\limits_K f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} r \cdot f(r\cos\varphi + x_0, r\sin\varphi + y_0)\,d\varphi \right) dr.$$

  A fenti transzformációs képlet egy nagyon speciális esete egy sokkal általánosabb **integráltranszformációs** képletnek. Ám az ehhez szükséges fogalmak ismertetése túlmegy ennek az előadásnak a keretein.

Tétel: **Alkalmazások.**

- **Vékony lemez tömege.**
  Ha a H test vastagsága elhanyagolható a többi méretéhez képest, akkor a test tömege:

$$m = \iint\limits_H \rho(x,y)\,dxdy,$$

  ahol $\rho(x,y)$ a test sűrűsége.

- **Vékony lemez tömegközéppontja (súlypontja).**

$$s_x = \frac{\iint\limits_H x\rho(x,y)\,dxdy}{m}, \quad s_y = \frac{\iint\limits_H y\rho(x,y)\,dxdy}{m}$$

- **Kiterjedt test tömege.**
  Ha V egy térbeli test, amelynek sűrűsége $\rho(x,y,z)$, akkor a test tömege:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

- **Kiterjedt test tömegközéppontja (súlypontja).**

$$s_x = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m}, \; s_y = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m}, \; s_z = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m}$$

15. Számsorozatok konvergenciája

15.1. Konvergens és divergens sorozatok

Ha egy valós függvény értelmezési tartománya a természetes számok halmaza (illetve általánosabban annak egy végtelen része), akkor a függvényt **sorozatnak** nevezzük. A sorozat hagyományos jelölésénél nem használunk zárójelet az értékek megadásánál, hanem indexbe írjuk a változót. Így beszélhetünk az a_n, b_n stb. sorozatokról. Tehát az

$$a_n = \frac{1}{n}$$

sorozat az a függvény, amelyik minden pozitív egész számhoz a szám reciprokát rendeli.

Az a_n sorozat esetén az n természetes számhoz rendelt valós számot a sorozat **n. tagjának** nevezzük.

Definíció: A konvergencia definíciója.
Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat **konvergál** az a valós számhoz, ha bármely pozitív ε szám esetén megadható egy n_0 (ε-tól függő) **küszöbindex** úgy, hogy bármely $n \geq n_0$ esetén a_n és a eltérése, $|a_n - a|$ kisebb mint ε. Logikai jelekkel:

$$a_n \to a \text{ vagy } \lim a_n = a, \text{ ha } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Tétel: Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergál az a számhoz, ha bármely pozitív ε szám esetén a sorozatnak csak véges sok tagja van messzebb a-tól mint ε. Logikai jelekkel:

$$a_n \to a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esetén az } \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \text{ halmaz } \textbf{véges.}$$

Tétel: A határérték egyértelmű, azaz ha $a_n \to a$ és $a_n \to b$, akkor $a = b$.

Definíció: Divergens sorozatok.

Ha egy sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **divergens**. A divergens sorozatokat tovább osztályozhatjuk.

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat **(plusz) végtelenbe tart** (divergál), jelekkel leírva $a_n \to \infty$, ha minden pozitív irányú félegyenes véges kivétellel minden tagját tartalmazza a sorozatnak, azaz

$$a_n \to \infty, \text{ vagy } \lim a_n = \infty, \text{ ha } \forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ (a_n > L).$$

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat **mínusz végtelenbe tart** (divergál), jelekkel leírva $a_n \to -\infty$, ha minden negatív irányú félegyenes véges kivétellel minden tagját tartalmazza a sorozatnak, azaz

$$a_n \to -\infty, \text{ vagy } \lim a_n = -\infty, \text{ ha } \forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ (a_n < L).$$

Ha egy sorozat divergens, de nem tart egyik végtelenhez sem, akkor a sorozat **oszcillálva divergens**.

15.2. Műveleti szabályok

Tétel:

- Két konvergens sorozat összege konvergens és az összeg sorozat határértéke a határértékek összege. Azaz ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor
$$a_n + b_n \to a + b.$$
- Ha az a_n sorozat konvergál és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans (valós szám), akkor a $c \cdot a_n$ sorozat konvergál a határérték konstans-szorosához, azaz ha $a_n \to a$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor
$$c \cdot a_n \to c \cdot a.$$

- Két konvergens sorozat szorzata konvergens és a szorzat sorozat határértéke a határértékek szorzata. Azaz ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b.$$

- Konvergens sorozat reciproka tart a határérték reciprokához, feltéve, hogy a sorozat tagjai és a határérték egyike sem nulla. Ebből és a szorzatszabályból kiolvasható a hányadosokra vonatkozó szabály: ha $a_n \to a$ és $b_n \to b,\ b \neq 0,\ b_n \neq 0$, akkor
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

- Ha az a_n sorozat konvergens és $a_n \to a$, k pedig egy tetszőleges nem nulla egész szám, akkor
$$a_n^k \to a^k.$$

- Ha az $a_n > 0$ sorozat konvergens és $a_n \to a$, k pedig egy tetszőleges nem nulla egész szám, akkor
$$\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}.$$

Tétel: **Rendőr szabály.**
Ha a_n, b_n és c_n három sorozat, amelyekre
$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ és } a_n \to a \text{ és } b_n \to a,$$
akkor a c_n sorozat konvergál és $c_n \to a$.
Azaz ha két, ugyanoda konvergáló (tartó) sorozat közrefog egy harmadikat, akkor az is tart ugyanoda, ahova a másik kettő.

Megjegyzés: A fenti szabályok legtöbbje kiterjeszthető azokra az esetekre is, amikor a sorozatok végtelenbe tartanak. A kivételes eseteket, amikor nincs érvényes szabály, **kritikus határértékeknek** nevezzük. Pontosabban megfogalmazva:

Tétel:

- Végtelen + véges = végtelen.
  Végtelen + végtelen = végtelen.
  $\infty + (-\infty)$: kritikus.

- Végtelenszer nem nulla = végtelen.
  Végtelenszer végtelen = végtelen.
  Végtelenszer nulla: kritikus.

- Végtelen per nem nulla = végtelen.
  Véges per végtelen = nulla.
  Végtelen per végtelen: kritikus.
  Nulla per nulla: kritikus.
  Nem nulla per nulla: végtelen, ha a nevező nem vált előjelet, egyébként kritikus.

15.3. Monoton sorozatok

Definíció: **Korlátos sorozat.**
Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat **korlátos**, ha van olyan K (pozitív) valós szám, hogy a sorozat minden tagjára
$$|a_n| < K.$$

Tétel: Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Definíció: **Monoton sorozat.**
Az a_n sorozat **monoton növekedő**, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$, azaz a nagyobb indexű tag nem kisebb a kisebb indexű tagnál. Ha itt az egyenlőséget nem engedjük meg, azaz a nagyobb indexű tag nagyobb, a sorozat **szigorúan monoton növekvő**.

Hasonlóan az előzőhöz,az a_n sorozat **(szigorúan) monoton csökkenő**, ha a nagyobb indexű tag (kisebb) nem nagyobb a kisebb indexű tagnál.

Az a_n sorozat **monoton**, ha monoton nő vagy monoton csökken.

Tétel: **Monoton sorozat határértéke.**
Minden monoton és korlátos sorozat konvergens. Általánosabban: minden monoton sorozatnak van határértéke (nem oszcillál), mégpedig

- konvergál ha korlátos,
- plusz végtelenhez tart, ha monoton növekedő és nem korlátos
- mínusz végtelenhez, ha monoton csökkenő és nem korlátos.

15.4. Nevezetes sorozatok

Tétel: Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növekedő és korlátos, tehát konvergens.

Definíció: **Euler konstans (e).**
Az előző sorozat határértékét e-vel **(Euler konstans)** jelöljük. Értéke 2 és 3 között van, közelítőleg

$$e \approx 2{,}718...$$

Mivel a matematikai analízisben, fizikában igen gyakran fordul elő az e alapú hatványozás, az e^x függvény inverzének, az e alapú logaritmusnak külön jele és elnevezése van: $\ln x$, a **természetes alapú logaritmus**. A matematikában szokás még $\log x$-el is jelölni.

Tétel: **Néhány nevezetes sorozat határértéke.**

- $\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } |a| < 1 \\ 1 & \text{ha } a = 1 \\ \infty & \text{ha } a > 1 \\ \text{oszcillál} & \text{ha } a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$.
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- Ha k tetszőleges rögzített (n-től nem függő) pozitív egész és $a > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

16. Numerikus sorok

16.1. Végtelen sorok konvergenciája

Ha végtelen sok számot összeadunk, pontosabban egy a_n sorozat összes elemét összeadjuk, **végtelen sort** kapunk. Ezt a végtelen sok tagú összeget a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kifejezéssel jelöljük.

Szeretnénk a végtelen sorokhoz hozzárendelni egy számot, a sor összegét. Ezt nem minden sor esetén tudjuk megtenni. Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + \cdots$ végtelen sort, és legyen ennek összege az A szám. Mivel kétszer akkora számok összege nyilván kétszer akkora, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2+4+8+\cdots$ sor összege $2 \cdot A$. De ha az eredeti sorból elhagyjuk az első tagot, azaz kivonunk 1-et, éppen ezt a sort kapjuk. Tehát eljutottunk az $A - 1 = 2 \cdot A$ egyenlethez. Ebből kapjuk, hogy a csupa pozitív tagból álló sor, a kettő hatványok összege negatív, $A = -1$. Ez nyilvánvaló képtelenség.

Definíció: Részletösszegek.
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor **n-edik részletösszegén** az elő n darab tag $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ összegét értjük.

Definíció: A konvergencia definíciója.

Ha a részletösszegek s_n sorozata konvergens és tart az A számhoz, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **végtelen sor konvergens, és az összege A**. Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Definíció: Abszolút konvergencia.
Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Tétel: Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens.

Definíció: Divergens sor.

Ha a részletösszegekből képzett s_n sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **végtelen sor divergens**.

Definíció: Végtelen, mint a sor összege.

Ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (illetve $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **végtelen sor összege ∞ (illetve $-\infty$)**.

Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (illetve $-\infty$).

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy ha minden a_n pozitív, akkor a részletösszegek (s_n) sorozata monoton növő, ezért vagy konvergens (ha korlátos), vagy tart a végtelenbe.

16.2. Nevezetes numerikus sorok

Definíció: Geometriai sor.

Ha q tetszőleges valós szám, a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ végtelen sort **geometriai sornak** nevezzük. A (véges) geometriai sor összegképlete szerint $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Ebből látható, hogy

Tétel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{oszcillál} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Definíció: **Harmonikus sor.** A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort **harmonikus sornak** nevezzük.

Tétel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, azaz **a harmonikus sor divergens.**

Tétel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ végtelen sor konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens ha $\alpha \leq 1$.

16.3. A konvergencia elemi tulajdonságai

Tétel: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor $a_n \to 0$.

Megjegyzés: A $a_n \to 0$ feltétel a konvergencia **szükséges feltétele**, de **nem elégséges**, mit azt a harmonikus sor példája is mutatja: **a harmonikus sor tagjai nullához tartanak, de a harmonikus sor divergens!**

Tétel: **Műveleti szabályok.**

- Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és összege A, akkor tetszőleges c valós szám esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ végtelen sor is konvergens és összege $c \cdot A$. Röviden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok konvergensek és összegük A illetve B, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ végtelen sor is konvergens és összege $A + B$. Röviden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Megjegyzés: Általános szorzat szabály nincs!

16.4. Konvergencia kritériumok

Tétel:

- **Majorizációs elv.**
  Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok tagjaira teljesül, hogy $|a_n| \leq b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

  A fenti tételben elég az is, ha az $|a_n| \leq b_n$ feltétel véges sok tag kivételével minden n-re teljesül.

- **Nagyságrendi kritérium.**
  Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ két pozitív tagú sor és $\frac{a_n}{b_n} \to c$, ahol $0 < c < \infty$, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens, azaz ha az egyik sor konvergens, akkor a másik is.

- **Hányadoskritérium.**
  Ha $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to q$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor $q < 1$ esetén abszolút konvergens, $q > 1$ esetén pedig divergens. A $q = 1$ esetben a hányados kritérium segítségével nem tudjuk eldönteni,hogy a sor konvergens vagy divergens.

- **Gyökkritérium.**
  Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \to q$ akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor $q < 1$ esetén abszolút konvergens, $q > 1$ esetén pedig divergens. A $q = 1$ esetben a gyökkritérium segítségével nem tudjuk eldönteni,hogy a sor konvergens vagy divergens.

- **Integrál kritérium.**
  Ha f egy monoton csökkenő pozitív függvény az $[1, \infty)$ félegyenesen, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ végtelen sor és az $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál egyszerre konvergens vagy divergens.

17. Hatványsorok, Taylor sor

17.1. Függvénysorok

Gyakran szükség van arra, hogy **végtelen sok függvény összegét** próbáljuk meghatározni. Így kapjuk a **függvénysor** fogalmát.

Definíció: Függvénysor konvergenciája.

Ha (f_n) függvények egy végtelen sorozata, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor **(pontonként) konvergál a H halmazon és összege az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény**, ha minden $x \in H$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ végtelen sor konvergens és összege $f(x)$. Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ illetve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.

Definíció: Konvergencia tartomány.

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor **konvergenciatartománya** azon pontok halmaza, ahol a függvénysor konvergens.

17.2. Hatványsorok

Definíció: Hatványsor.
Ha (a_n) egy sorozat, c pedig egy valós szám, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

alakú függvénysort **c középpontú hatványsornak** nevezzük.

Tétel: A hatványsorok konvergenciatartománya mindig egy olyan intervallum, amelyik az esetleges végpontokat kivéve szimmetrikus a hatványsor középpontjára, c-re.

A fenti tételbe beleértendő az az eset, amikor ez a tartomány az egész számegyenes, illetve az egyedül a c pontból álló halmaz.

Definíció: Konvergenciasugár.
A hatványsor **konvergenciasugara** a konvergenciatartomány hosszának fele, ha ez véges szám és ∞, ha a hatványsor az egész számegyenesen konvergens.

A **konvergenciatartomány belseje** a $(c-R, c+R)$ nyílt intervallum, ha R véges, illetve $\mathbb{R}$, ha $R = \infty$.

Tétel: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hatványsor konvergenciatartománya a $[-1,1)$ intervallum, konvergenciasugara 1, a konvergenciatartomány belseje pedig a $(-1,1)$ nyílt intervallum.

Tétel: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartománya $\mathbb{R}$, konvergenciasugara ∞, a konvergenciatartomány belseje pedig szintén $\mathbb{R}$.

Tétel: **A konvergenciasugár kiszámolása.** Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$ illetve ha $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, akkor

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{ha } 0 < L < \infty \\ \infty & \text{ha } L = 0 \\ 0 & \text{ha } L = \infty \end{cases}.$$

Tétel: **A hatványsor deriváltja.** Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, akkor f deriválható a konvergenciatartomány belsejében és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1},$$

azaz hatványsort tagonként lehet deriválni. A derivált sor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergenciasugarával.

Tétel: **A hatványsor integrálja.** Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, akkor f-nek van primitív függvénye a konvergenciatartomány belsejében és (az egyiket) megkaphatjuk a hatványsor tagonkénti integrálásával:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.$$

Az így kapott integrál sor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergenciasugarával.

17.3. Taylor polinom

Ha az f függvény n-szer deriválható a c pontban akkor kereshetjük azt a legkisebb fokszámú polinomot, amelynek első n deriváltja a c pontban megegyezik az f függvény megfelelő deriváltjaival. Itt a 0-adik deriválton a függvény helyettesítési értékét értjük. $n = 1$ esetén ez a polinom c-beli érintő lesz:

$$t_1(x) = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Definíció: **Taylor-polinom.**
Ha az f függvény n-szer deriválható a c pontban akkor a

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

n-ed fokú polinomot az f függvény c pontbeli **n-edik Taylor-polinomjának** nevezzük.

Tétel: $t_n(x)$ az egyetlen legfeljebb n-edfokú polinom, amelynek az első n deriváltja a c pontban megegyezik az f függvény megfelelő deriváltjaival.

Az $f(x) - t_n(x)$ különbség, a "maradék" többféle formában is felírható, ezek közül itt csak egy szerepel, az úgynevezett **Lagrange-féle maradék.**

Tétel: **Taylor-formula Lagrange-féle maradékkal.**
Legyen az f függvény $n+1$-szer deriválható a $[c, x]$ intervallumon. Ekkor van olyan $d \in (c, x)$ szám, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Ha az f függvény $n+1$-szer deriválható a $[x, c]$ intervallumon, akkor van olyan $d \in (x, c)$ szám, amelyre a fenti egyenlőség teljesül.

A Taylor-formulában szereplő

$$\frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Lagrange-féle maradék sok függvény esetén alkalmas arra, hogy megbecsüljük a függvény és a Taylor-polinom eltérését.

17.4. Taylor sor

Definíció: A Taylor sor definíciója.
Legyen f akárhányszor deriválható a c pontban. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

hatványsort az f függvény ***c* pontbeli Taylor-sorának** nevezzük, a fenti sorban szereplő

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

együtthatókat pedig **Taylor-együtthatóknak**.

Természetes kérdés, hogy milyen feltételek mellett igaz, hogy a Taylor-sor előállítja a függvényt, legalább is a c pont egy környezetében. Azt is meg kell vizsgálni, hogy egy függvényt hogyan lehet hatványsor összegeként előállítani.

Tétel: A hatványsor előállítás egyértelmű. Ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

teljesül a c pont egy környezetében, azaz a konvergenciasugár nem nulla, akkor az f függvény akárhányszor deriválható a c pontban és a hatványsor megegyezik a Taylor-sorral, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

A fenti tétel szerint egy függvényt csak a Taylor-sora tudja hatványsorban előállítani. De fordítva nem igaz, hogy a Taylor-sor biztosan előállítja a függvényt. Lehet hogy a Taylor-sor csak c-ben konvergens, de az is, hogy mindenütt konvergens, de csak c-ben lesz az összeg az f függvény értéke. Ez utóbbi esetre mutat példát a következő tétel.

Tétel: Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Ekkor az f függvény akárhányszor deriválható és a 0-ban minden deriváltja nulla. Így tehát a 0-hoz tartozó Taylor sor az azonosan nulla függvényt állítja elő, viszont $f(x) > 0$ ha $x \neq 0$.

Tétel: Ha az (a, b) intervallumon az f függvény akárhányszor deriválható és megadható egy M szám úgy, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $x \in (a, b)$ esetén $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, akkor minden $c \in (a, b)$ esetén a c-hez tartozó Taylor-sor előállítja a függvényt az (a, b) intervallumon.

Ebből a tételből azonnal következik, hogy az e^x, $\sin x$, $\cos x$ függvényeket mindenütt előállítja a 0-hoz tartozó Taylor-soruk.

Tétel: Nevezetes Taylor-sorok.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha $x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ha $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ha $x \in \mathbb{R}$;
- $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ha $x \in \mathbb{R}$;
- $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ha $x \in \mathbb{R}$;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha $|x| < 1$;
- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ha $|x| < 1$;
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ha $|x| < 1$.

18. Fourier-sorok

Ha összeadunk véges sok 2π szerint periodikus függvényt, 2π szerint periodikus függvényt kapunk. Ez végtelen összegre is igaz, feltéve, hogy a függvénysor konvergens $\mathbb{R}$-en. Ehhez persze elég, hogy egy 2π hosszú intervallumon konvergens legyen az összeg.

Miért tudjuk megkülönböztetni a hegedű hangját a kürt hangjától, ha ugyanabból a kottából játszanak?

A legegyszerűbb 2π szerint periodikus függvények azok, amelyek a $\sin nx$ és a $\cos nx$ függvényekből "keverhetőek" ki. Itt $n = 0$ esetén a konstans függvényt kapjuk. Igaz-e, hogy minden periodikus (vagy legalább is a legtöbb) előáll az említett függvényekből végtelen összeg segítségével?

Ezekkel a problémákkal a Fourier sorok elmélete foglalkozik. Az első konkrét probléma a rezgő húr egyenletének a megtalálása volt a XVIII. században (d'Alambert, Bernoulli, Euler). A XIX. század elején Fourier alkalmazta az előző (bár vitatott) módszert a hővezetés egyenletének megtalálására.

Definíció: Trigonometrikus sorok.

Az $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ alakú függvénysorokat **trigonometrikus soroknak** nevezzük.

Az itt szereplő $\{\sin nx,\ \cos nx : n = 0,1,2,\dots\}$ függvényeket **trigonometrikus rendszernek** nevezzük.

Ha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egy, a H halmazon konvergens függvénysor összege és n egy pozitív egész szám, akkor a **függvénysor n-edik maradéka** az

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$$

függvény sor. Ez szintén konvergens a H halmazon.

Definíció: Függvénysor egyenletes konvergenciája.

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor **egyenletesen konvergens** az $[a, b]$ intervallumon, ha minden pozitív ε-hoz van olyan n_0 küszöbindex, hogy bármely $n \geq n_0$ és $x \in [a, b]$ esetén $|R_n(x)| < \varepsilon$. Logikai jelekkel is leírjuk ezt a bonyolult állítást:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ \forall x \in [a, b]\ \ (|R_n(x)| < \varepsilon)\,.$$

Az "egyenletes" szót az indokolja, hogy a fenti definíció valójában azt jelenti, hogy a pontonkénti konvergenciánál a minden x-re külön-külön választott küszöbindexet x-től függetlenül egyszerre is megválaszthatjuk egy adott ε-hoz.

Tétel: Weierstrass-kritérium.

Ha az $f_n(x)$ függvényekhez találhatók olyan a_n valós számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in H$ esetén $|f_n(x)| \leq a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens a H halmazon.

Egy ilyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **numerikus majoráns sornak** nevezünk.

Ha egy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysornak van numerikus majoránsa a H halmazon és minden $|f_n(x)|$ függvénynek

van itt maximuma, M_n, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sor is numerikus majoráns. Mivel deriválható függvények esetén vannak módszereink a maximum megkeresésére, legalább is intervallum esetén, így a legelterjedtebb módszer numerikus majoráns segítségével megállapítani az egyenletes konvergenciát az, hogy megnézzük, konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sor.

Meg kell jegyezni azonban, hogy egy függvénysor úgy is lehet egyenletesen konvergens, hogy nincs numerikus majoráns sora. Ilyen sorra példa a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

sor a $0 < x < \infty$ félegyenesen. Ugyanis itt

$$|R_n(x)| < \left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}.$$

Tétel: **A trigonometrikus rendszer ortogonális** a $[0,2\pi]$ intervallumon, azaz teljesülnek a következő egyenletek:

- Ha $n \geq 1$ egész, akkor

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$$

- Ha n és m két nemnegatív egész szám, akkor

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\ \cos mx\, dx = 0$$

- Ha n és m két különböző nemnegatív egész szám, akkor

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\ \sin mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\ \cos mx\, dx = 0$$

A fenti állításokat egyszerre is megfogalmazhatjuk.

Tétel: Ha $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ két tetszőleges függvény a trigonometrikus rendszerből és legalább az egyik nem a konstans 1 függvény, akkor

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{ha } \varphi = \psi \\ 0 & \text{ha } \varphi \neq \psi \end{cases}$$

Tétel: **Cantor tételének egy speciális esete.**

Tegyük fel, hogy az $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en (ez ugyanaz, mint $[0,2\pi]$-n). Ekkor f mindenütt folytonos és

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (n \geq 1)$$

A fenti tétel egy speciális esete (mert feltettük az egyenletes konvergenciát) annak a tételnek, hogy ha egy periodikus függvényt elő tudunk állítani trigonometrikus sor segítségével, akkor az előállításában szereplő a_n és b_n együtthatók egyértelműen meghatározottak **(Cantor tétele)**.

Definíció: Fourier-együtthatók, Fourier-sor.
Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus 2π szerint és integrálható a $[0,2\pi]$ intervallumon, akkor az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (n \geq 1)$$

számokat az ***f* függvény Fourier-együtthatóinak**, az általuk felírt

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sort pedig az ***f* függvény Fourier-sorának** nevezzük.

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy a Fourier-együtthatókat meghatározó integrálok határainak, a periódusosság miatt, tetszőleges 2π hosszú intervallum végpontjait is választhatjuk.

Tétel: Páros és páratlan függvények Fourier-sora.

- Ha a 2π szerint periódusos $f(x)$ függvény páros, akkor minden $b_n = 0$, azaz a Fourier-sora tiszta koszinuszos sor.
- Ha a 2π szerint periódusos $f(x)$ függvény páratlan, akkor minden $a_n = 0$, azaz a Fourier-sora tiszta szinuszos sor.

Tétel: Ha egy 2π szerint periodikus függvény folytonos és a Fourier-sora egyenletesen konvergens,akkor a Fourier-sor összege minden x pontban $f(x)$-el egyenlő, azaz az f-et előállítja a Fourier-sora.

Definíció: Szakaszonként folytonos függvény.
Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **szakaszonként folytonos** az $[a, b]$ intervallumon, ha véges sok pont kivételével folytonos és minden szakadási helyen van (véges) baloldali és jobboldali határértéke. Természetesen az a végpontban csak a jobboldali, a b-ben pedig baloldali határértéket követelünk meg.

Tétel: A Fourier-sor pontonkénti konvergenciája.
Ha az $f(x)$ függvény 2π szerint periodikus és $f(x)$ valamint $f'(x)$ szakaszonként folytonos a $[0,2\pi]$ intervallumon, akkor az $f(x)$ függvény Fourier-sora mindenütt konvergens, az $f(x)$ függvény folytonossági helyein a Fourier-sor előállítja a függvényt, a szakadási helyeken pedig a függvény bal és jobboldali határértékének a számtani közepe.

19. Lineáris vektorterek

19.1. Az n-dimenziós vektortér

Definíció: Az n dimenziós Euklideszi tér.
Ha n egy pozitív egész szám, akkor $\mathbb{R}^n$ jelöli az **n tagú számsorozatok halmazát**. Egy ilyen $\mathbf{a}$ sorozat elemei a pont illetve vektor **koordinátái**. Ha ennek az $\mathbf{a}$ vektornak a koordinátái rendre az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ akkor a vektort így jelöljük:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ebben a részben a vektorok tehát **oszlop-vektorok** és nem a kényelmesebb jelölésű sor-vektorok. Ennek az az oka, hogy csak így lehet a vektor-műveleteket azonosítani a mátrix-műveletekkel.

Azt a vektort, amelynek minden koordinátája nulla a $\mathbf{0}$ jelöli .

Definíció: Vektor-műveletek.
Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ két n-dimenziós vektor $\lambda \in \mathbb{R}$ pedig egy valós szám vagy más néven skalár, akkor definiálhatjuk a két vektor **összegét** illetve az egyik **skalárszorosát**:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \text{ illetve } \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Tehát a műveleteket koordinátánként kell elvégezni.

Tétel: Műveleti szabályok.

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, az összeadás **kommutatív**.
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, az összeadás asszociatív.
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, a null-vektor az additív egység.
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, additív inverz.
- $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$.
- $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$
- $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$

Definíció: Vektorok különbsége.
A fenti szabályok alapján bevezetjük **két vektor különbségét:**

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b}.$$

Definíció: A továbbiakban $\mathbf{e}_i$ jelöli azt a vektort, amelyiknek az i-edik koordinátája 1 a többi pedig 0. Ezt a vektort az **i-edik egységvektornak** nevezzük.

Tétel: Az egységvektorok segítségével felírhatjuk az $\mathbf{a}$ vektort egy úgynevezett **lineáris kombináció** segítségével, mégpedig egyértelműen:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i.$$

Definíció: **Vektor hossza** vagy **abszolút értéke.**
Az $\mathbf{a}$ vektor hossza, $|\mathbf{a}|$ a következőképpen van definiálva:

$$|\mathbf{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Tétel: **Az abszolút érték tulajdonságai.**

- $|\mathbf{a}| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ **Háromszög-egyenlőtlenség.**

Definíció: **Skalárszorzat.**
Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ két n-dimenziós vektor, akkor a két vektor **skalárszorzata** egy valós szám, mégpedig

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Itt $a_1, a_2, \cdots, a_n$ az $\mathbf{a}$ vektor, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ pedig a $\mathbf{b}$ vektor koordinátáit jelöli.

Tétel: **A skalárszorzat tulajdonságai.**

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, a skalárszorzat kommutatív.
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor **merőleges** egymásra, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Definíció: **Bázis vektorok.**
Az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vektoraiból álló rendszert **bázisnak** nevezünk, ha bármely $\mathbf{a}$ vektorhoz **egyértelműen** találhatók olyan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ számok, amelyekre

$$\mathbf{a} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{b}_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{b}_i$$

Tehát az $\{\mathbf{e}_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ egy bázisa az n-dimenziós térnek. Léteznek azonban más bázisok is.

19.2. Mátrixok

Definíció: A **$p \times q$-as mátrix** valós számoknak egy olyan téglalap alakú táblázata, amelynek p sora és q oszlopa van. Egy általános A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában található számot a_{ij}-vel jelöljük. Magát az A mátrixot pedig

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

jelöli. Az összes $p \times q$-as mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{p \times q}$ jelöli.

Azokat a mátrixokat, amelyeknek ugyanannyi sora van mint oszlopa, azaz az $n \times n$-es mátrixokat **négyzetes mátrixoknak** nevezzük.

Definíció: **Mátrixok összege és konstansszorosa.**
Definiáljuk **két azonos méretű mátrix összegét** és **egy mátrix számszorosát:**

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1q}+b_{1q} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2q}+b_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \dots & a_{pq}+b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1q} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2q} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{p1} & \lambda a_{p2} & \dots & \lambda a_{pq} \end{pmatrix}$$

Tehát a műveleteket úgy végezzük, hogy a megfelelő helyeken álló számokat összeadjuk illetve a mátrix minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a valós számmal.

Definíció: **Null-mátrix.**
Vezessük be a **null-mátrix** fogalmát: ez az a mátrix, amelynek minden eleme 0. Ennek jele egyszerűen 0, ez nem okoz majd félreértéseket.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots 0 \end{pmatrix}$$

Tétel: **Műveleti szabályok.** Az összeadás és a skalárral való szorzás szabályai ugyanazok mint a vektoroknál. Tehát:

- $A + B = B + A$, az összeadás **kommutatív**.
- $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$, az összeadás **asszociatív**.
- $A + 0 = A$, a null-mátrix az **additív egység**.
- $A + (-1)A = 0$, **additív inverz**.
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1 \cdot A = A$ és $0 \cdot A = 0$.

Megjegyzés: A műveleti szabályok hasonlósága a vektorműveletekhez nem véletlen. Az n-dimenziós vektorokat tekinthetjük olyan mátrixoknak amelyeknek n sora és csak egy oszlopa van. Így a vektorok közötti összeadást és skalárral való szorzást megkaphatjuk úgy, mint a megfelelő mátrix műveletek eredményét.

A vektorok közötti skalárszorzatot is megkapjuk majd mint speciális alakú mátrixok szorzatát.

Definíció: Mátrixok szorzása.
Legyen $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ egy $p \times q$-as mátrix $B \in \mathbb{R}^{q\times r}$ egy $q \times r$-es mátrix. Ekkor definiáljuk a két mátrix **szorzatát**, a $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ $p \times r$-es mátrixot:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pr} \end{pmatrix}$$

ahol $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{s=1}^{q} a_{is}b_{sj}$.

Ezt a fajta szorzást **sor-oszlop szorzásnak** is nevezik, mivel a c_{ij} elemet úgy kapjuk, hogy az első tényező i-edik sorát (skalárisan) szorozzuk a második tényező j-edik oszlopával.

Megjegyzés: Fontos megjegyezni, hogy két mátrix szorzatát csak akkor értelmezzük, ha a második tényezőnek, most B-nek ugyanannyi sora van mint ahány oszlopa van A-nak, az első tényezőnek.

Tehát a mátrixok szorzása nem kommutatív, mert a fordított sorrendű szorzás általában nincs is értelmezve. Persze ha mindkét mátrix négyzetes mátrix, akkor van értelme a fordított sorrendű szorzásnak, de majd látunk példát arra, hogy a szorzás még így sem kommutatív!

Tétel: A mátrixszorzás műveleti szabályai.

- $(AB)C = A(BC)$, a mátrixszorzás **asszociatív**.
- $A(B + C) = AB + AC$, **baloldali disztributivitás**.
- $(A + B)C = AC + BC$, **jobboldali disztributivitás**.
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Definíció: Transzponált mátrix.
Ha $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ egy $p \times q$-as mátrix, akkor a $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$, az A mátrix **transzponáltja** az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy a mátrix sorait és oszlopait felcseréljük, azaz $b_{ij} = a_{ji}$. Az A mátrix transzponáltját A^T-vel jelöljük.

Tétel: Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak megfelelő $n \times 1$ mátrixokat a-val illetve b-vel jelöljük, akkor

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^T b = b^T a.$$

Megjegyzés: A továbbiakban egy vektort és a neki megfelelő mátrixot ugyanúgy jelöljük. Így tehát, ha A egy $p \times q$-as mátrix $\mathbf{x}$ pedig egy q-dimenziós vektor, akkor az $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ mátrixszorzat eredménye tekinthető egy p-dimenziós vektornak.

19.3. Lineáris leképezések

Definíció: Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezünk, ha művelettartó, azaz tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

- $\mathcal{A}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathcal{A}\mathbf{a} + \mathcal{A}\mathbf{b}$
- $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{a}$

Mint látható, lineáris leképezések esetén, ha nem okoz félreértést, nem tesszük zárójelbe a leképezés argumentumát.

Definíció: Lineáris leképezés mátrixa.
Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ egy lineáris leképezés. Jelölje $\mathbf{a}_j$ az $\mathbf{e}_j$ egységvektor $\mathcal{A}$ szerinti képét. Tehát

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j.$$

Ekkor az $\mathcal{A}$ lineáris leképezéshez hozzárendelhetjük azt az A $p\times q$-as mátrixot, amelynek j-edik oszlopában éppen az $\mathbf{a}_j$ koordinátái állnak. Ezt a mátrixot az **$\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixának** nevezzük.

Másrészt minden A $p \times q$-as mátrix segítségével definiálhatunk egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezést. Ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ tetszőleges q-dimenziós vektor, akkor legyen

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = A\mathbf{x}.$$

Könnyen látható, hogy az így kapott leképezés tényleg lineáris leképezés.

Tétel: Az előzőekben definiált megfeleltetés mátrixok és lineáris leképezések között egy-egy értelmű: egy tetszőleges A $p \times q$-as mátrixhoz tartozó $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixa éppen az A mátrix.

Tétel: Legyen $\mathcal{B} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$ és $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ két lineáris leképezés, mátrixaik pedig B illetve A. Ekkor a $\mathcal{C} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ összetett leképezés mátrixa éppen a $C = A \cdot B$ mátrix.

Definíció: Lineáris transzformáció.
Az $\mathbb{R}^n$ vektortér önmagába képző lineáris leképezéseit **lineáris transzformációknak** nevezzük.

Azt a lineáris transzformációt, amelyik minden vektort helybenhagy **identitásnak, jele $\mathcal{I}$** a neki megfelelő I mátrixot **egység mátrixnak** nevezzük. Tehát tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathcal{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ és

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Definíció: Lineáris egyenletrendszer.
Tekintsük a következő, q ismeretlenből és p egyenletből álló

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1q}x_q & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2q}x_q & = b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & a_{pq}x_q & = b_p \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert.

Ha az egyenletek bal oldalán szereplő a_{ij} együtthatókat egy $p \times q$-as A mátrix elemeinek tekintjük, az x_i ismeretleneket egy p-dimenziós $\mathbf{x}$ vektor koordinátáinak, a b_i számokat pedig a $\mathbf{b}$ vektor koordinátáinak, akkor az egyenletrendszer a sokkal tömörebb

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakban is írhatjuk.

Ha az A mátrixnak megfelelő lineáris leképezést $\mathcal{A}$ jelöli, akkor tehát a

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

egyenlet megoldása azt jelenti, hogy adott $\mathcal{A}$ lineáris leképezés és adott $\mathbf{b}$ vektor esetén keressük azt az $\mathbf{x}$ vektort amelynek $\mathcal{A}$ szerinti képe éppen a $\mathbf{b}$ vektor.

Természetesen merül fel az a kérdés, hogy igaz-e , hogy minden $\mathbf{b}$ esetén van megoldás és az egyértelmű. Ez annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy a $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés mikor bijekció $\mathbb{R}^q$ és $\mathbb{R}^p$ között.

Tétel:

- Ha az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés injektív (egy-egy értelmű), akkor $q \leq p$.
- Ha az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés szürjektív (ráképezés), akkor $q \geq p$.
- Ha az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés bijektív (azaz van inverze), akkor $p = q$.
- Ha $p = q$ akkor az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció pontosan akkor injektív (egy-egy értelmű), ha szürjektív (ráképezés).

Így tehát csak akkor remélhetjük, hogy minden $\mathbf{b}$ esetén van egy és csak egy megoldás, ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixa négyzetes mátrix.

Definíció: Mátrix inverze.
A B $n \times n$-es mátrixot az A $n \times n$-es mátrix **inverzének** nevezzük, ha $B \cdot A = I$. Ekkor a B mátrixot A^{-1}-el jelöljük. Ha az A mátrixnak van inverze, akkor **invertálható mátrixnak** nevezzük.

Tétel: Ha az A mátrix invertálható és inverze A^{-1} akkor

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Definíció: Ortogonális mátrix.
Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot **ortogonális mátrixnak** nevezzük, ha invertálható és az inverz mátrix éppen a mátrix transzponáltja. Más szóval A ortogonális, ha

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I.$$

Tétel: Ha az előbb vizsgált lineáris egyenletrendszer esetén $p = q = n$ és az A mátrix invertálható, akkor

$$A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Ekkor tehát az egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektor esetén egyértelműen megoldható.

Természetesen meg kell vizsgálni azt a kérdést, hogy mikor van egy mátrixnak inverze és azt hogyan lehet megkapni. De ehhez a n-ed rendű determinánsok fogalmára és tulajdonságaira lesz szükség.

19.4. Determinánsok

Az **n-ed rendű determináns** egy hozzárendelés, amely $n \times n$ darab négyzet alakban elrendezett számhoz rendel egy számot. A determináns jelölése:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A hozzárendelés megadásához szükségünk lesz az **aldetermináns** fogalmára.

Definíció: Aldetermináns.
Legyen D egy n-ed rendű determináns. A D determináns (i,j)-edik aldeterminánsa az az $n-1$-ed rangú D_{ij} determináns, amelyet D-ből úgy kapunk, hogy kihagyjuk D i-edik sorát és j-edik oszlopát. Ha tehát $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$, akkor

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ számot a D determináns **(i,j)-edik előjeles** vagy **adjungált aldeterminánsának** nevezzük.

Definíció: Az n-ed rendű determináns rekurzív definíciója.
A determináns definícióját n szerinti rekurzióval adjuk meg.

Ha $n = 1$ akkor $D = |a_{11}| = a_{11}$. Nem tévesztendő össze az abszolút értékkel!

Ha $n = 2$, akkor $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ha már az $n-1$-ed rendű determinánsokat már definiáltuk, akkor

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots \pm a_{1n}D_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

Definíció: Főátló. A D determináns azon elemeit, amelyeknek a sor és oszlop indexe megegyezik, azaz az $\{a_{ii} : i = 1, \dots, n\}$ számokat a **determináns főátlójának** nevezzük.

Tétel: A determináns tulajdonságai.

- Ha a determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1)-el szorzódik. Ezért
  – ha a determináns két sora megegyezik, a determináns nulla.

- Ha valamelyik sor minden elemét ugyanazzal a λ számmal megszorozzuk, akkor a determináns értéke is λ-val szorzódik:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  Speciálisan
  – ha a determináns egyik sora csupa 0-ból áll, akkor a determináns értéke is 0.

- Ha a determináns egyik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor a determináns két determináns összegére bomlik, ahol az egyikben az adott sorban rendre az összegek egyik tagja a másikban pedig a másik tagja szerepel, a többi elem pedig mindkettőben ugyanaz mint az eredeti determinánsban:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Ha egy sorhoz hozzáadjuk a determináns egy másik sorának λ-szorosát, a determináns értéke nem változik. Ha tehát $i > 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{i1} & a_{12}+\lambda a_{i2} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Ha a determináns elemeit a főátlóra tükrözzük, azaz a sorokat és oszlopokat felcseréljük, a determináns értéke nem változik. Eszerint
  – minden szabály amit sorokra mondtunk ki érvényben marad oszlopokra is.

- Ha a D determináns főátlója alatt csupa 0 áll azaz $a_{ij} = 0$ ha $i > j$, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata, $D = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Tétel: Kifejtési tétel.
Egy D determináns bármely sora szerint kifejthető, pontosabban

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq k \\ D & \text{ha } i = k \end{cases}$$

19.5. Invertálható mátrixok

Definíció: Mátrix determinánsa.
Ha A egy $n \times n$-es mátrix, akkor a mátrix elemeiből álló n-ed rendű determinánst az ***A* mátrix determinánsának** nevezzük. Ennek jele $\det(A)$. Ha tehát

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ akkor } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tétel: Determinánsok szorzástétele.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Tétel: Egy A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\det(A) \neq 0$.

Tétel: **Inverz mátrix kiszámolása.** Ha az A mátrix invertálható, és

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

akkor jelölje A^* az A mátrix adjungált aldeterminánsaiból álló mátrixot,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

illetve $\widehat{A}$ az A^* mátrix transzponáltját:

$$\widehat{A} = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

19.6. Sajátérték, sajátvektor

Definíció: **Sajátérték.**
A λ valós számot a $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció **sajátértékének** nevezzük, ha található egy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Definíció: **Sajátvektor.**
A $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektort az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció **sajátvektorának** nevezzük, ha található olyan λ valós szám, amelyre $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

A sajátvektorok köréből kizártuk a nullvektort, hiszen minden $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció esetén $\mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Így aztán minden sajátvektorhoz egyértelműen tartozik egy sajátérték. Viszont a 0 valós számot nem zártuk ki a sajátértékek közül!

Definíció: Ha A jelöli a $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció mátrixát, akkor a $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor sajátérték, ha

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

A fenti tétel segítségével megkaphatjuk egy lineáris transzformáció sajátértékeit, mint egy polinom gyökeit.

Definíció: **Karakterisztikus polinom.**
Ha az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

akkor a

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

n-ed fokú polinomot az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció, illetve az A négyzetes mátrix **karakterisztikus polinomjának nevezzük**.

Tétel: Sajátérték, sajátvektor kiszámítása.
Ha λ a karakterisztikus polinom egy (valós) gyöke, $P(\lambda) = 0$, akkor a

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletnek van nemtriviális (nem azonosan nulla) megoldása, mert az egyenletrendszer determinánsa nulla, és az egyenletrendszer minden nem triviális megoldása sajátvektor a λ sajátértékkel.

Ennek az egyenletnek soha nem egyértelmű a megoldása, hiszen ha egy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor megoldás, akkor ennek minden nem nulla számmal való szorzata is megoldás.

Definíció: Szimmetrikus mátrix.
Az $n \times n$-es A mátrix **szimmetrikus**, ha $A^T = A$, azaz $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_{ij} = a_{ji}$. Az elnevezés onnan ered, hogy a mátrix elemei szimmetrikusak a főátlóra.

Tétel: Főtengelytétel.
Az $n \times n$-es A mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha megadható n darab páronként merőleges sajátvektora.

20. Differenciálegyenletek

A természettudományok számtalan területén fordul elő, hogy egy természeti törvényt matematikai alakban úgy írhatunk le, hogy egy vagy több összefüggést találunk egy állapot időbeli, térbeli értéke és az állapot megváltozása között. A matematikában ez azt jelenti, hogy egy vagy több egyenletet állítottunk fel egy függvény és a deriváltjai között.

Egyszerű példák erre a szaporodási illetve bomlási folyamatokat leíró egyenletek. Ilyen például a hőátadási (hűlési) törvény: a hőmennyiség átadásának sebessége egyenesen arányos a hőmérséklettel. De hasonló törvény írja le a radioaktív bomlást is.

Matematikailag keressük tehát azokat az $f(t)$ időtől függő függvényeket, amelyekre

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

Tétel: Az exponenciális függvény differenciálegyenlete.
Ha egy I intervallumon a deriválható $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $f'(x) = k \cdot f(x)$. akkor megadható egy $c \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy

$$f(x) = c \cdot e^{kx}$$

Bizonyítás: Ugyanis legyen $g(x) = f(x)e^{-kx}$. Ekkor

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0$$

De ha egy függvény deriváltja egy egész intervallumon nulla, akkor a függvény konstans, azaz megadható egy $c \in R$ szám úgy, hogy

$$g(x) = f(x)e^{-kx} = c$$

Definíció: Közönséges differenciálegyenletek.
Legyen n egy pozitív egész szám, f pedig egy $n+1$ változós függvény. Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

alakú egyenleteket **n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenleteknek** nevezzük.

Ha F egy $n+2$ változós függvény, akkor a

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

alakú egyenleteket **n-edrendű közönséges implicit differenciálegyenleteknek** nevezzük.

A **$\varphi(x)$ függvény a fenti explicit differenciálegyenlet megoldása az (a, b) intervallumon**, ha itt n-szer deriválható és minden $x \in (a, b)$ esetén

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

A "közönséges" szó arra utal, hogy a differenciálegyenlet megoldásait az egyváltozós függvények körében keressük. A többváltozós függvények esetén is felírhatunk differenciálegyenleteket. Ilyenkor a keresett függvény parciális deriváltjai szerepelnek az egyenletekben. Ez indokolja, hogy ezeket az egyenleteket **parciális differenciálegyenleteknek** nevezzük. A továbbiakban csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ezért a "közönséges" szót elhagyjuk.

Mint láttuk, egy differenciálegyenlet megoldásai még a legegyszerűbb esetekben sem egyértelműek. Általában a megoldások annyi szabadon választható paramétertől függenek, mint a differenciálegyenlet rendje.

20.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

Definíció: Szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletek.
Legyen $f(x)$ és $g(y)$ két egyváltozós függvény. Az

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

alakú elsőrendű differenciálegyenletet **szeparábilis differenciálegyenletnek** nevezzük.

Tétel: Ha az $y'(x) = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ szeparábilis differenciálegyenletben szereplő g függvény egy I intervallumon sehol sem nulla, valamint F az f-nek, G pedig a g-nek primitív függvénye, akkor egy $y : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény pontosan akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha megadható egy $c \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy $x \in I$ esetén

$$G(y(x)) = F(x) + c$$

Tehát a szeparábilis differenciálegyenlet összes megoldását **implicit** alakban adja meg a fenti formula. Néhány esetben az $y(x)$ függvény kifejezhető az egyenletből, azaz explicit alakban is megkaphatjuk. Erre legjobb példa az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet.

Definíció: Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. Az

$$y' + f(x)y = g(x)$$

alakú differenciálegyenleteket **elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.
Ha itt az egyenlet jobb oldalán szereplő g függvény azonosan nulla, azaz az $y' + f(x)y = 0$ alakú egyenletet **elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

Ha az f függvény állandó, nem függ x-től, az egyenletet **állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

A "lineáris" szót az indokolja, hogy ha egy homogén egyenletnek y_1 és y_2 is megoldása, $c \in \mathbb{R}$, akkor az $y_1 + y_2$ és cy_1 függvények is megoldások, azaz a homogén egyenlet megoldásai **lineáris vektorteret** alkotnak.

Tétel: elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása.

- Ha a $y' + f(x)y = g(x)$ lineáris differenciálegyenlet esetén F jelöli a f függvény egy primitív függvényét, akkor az egyenlet összes megoldása az

  $$y(x) = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)}\, dx$$

  alakú függvények.

- Ha az $y' + f(x)y = g(x)$ lineáris differenciálegyenlet esetén y_h a megfelelő homogén egyenlet egy nem triviális (nem azonosan nulla) megoldása, y_p pedig az (inhomogén) egyenlet egy rögzített (partikuláris) megoldása, akkor az összes megoldás az

  $$y = y_p + cy_h$$

  alakú függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Gyakran kényelmesebb a megoldásokat a második tétel alapján megkeresni, mit az első tétel bonyolult formuláját alkalmazni:

A homogén egyenlet "könnyen" megoldható, mert szeparábilis.
Egy partikuláris megoldást pedig gyakran megkaphatunk az úgynevezett **próbafüggvény módszerrel.** Ez abban áll, hogy a megoldást speciális alakú (pl. másodfokú polinomok) függvények körében keressük. Ez egy vagy több ismeretlen paramétert (együtthatót) jelent a próbafüggvényben, amelyekre az egyenletbe való behelyettesítés után numerikus egyenletet illetve egyenletrendszert kapunk.

Tétel: Newton-féle hűlési törvény.
Ha T_k jelöli a külső hőmérsékletet, akkor a Newton-féle hűlési törvény szerint egy (pontszerű) test hőmérsékletének, $T(t)$-nek a változása arányos a test és a környezet hőmérsékletének a különbségével, azaz

$$T'(t) = -\lambda(T(t) - T_k)$$

ahol λ rögzített, a test anyagára és alakjára jellemző pozitív konstans.
Kíváncsiak vagyunk a test $T(t)$ pillanatnyi hőmérsékletére, ha még azt is tudjuk, hogy a test hőmérséklete a $t = 0$ időpontban T_0.

A fenti differenciálegyenlet egy állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciálegyenlet:

$$T'(t) + \lambda T(t) = \lambda T_k$$

Keressük meg előbb a homogén egyenlet megoldásait:

$$T' + \lambda T = 0$$

Ennek nyilvánvaló módon a $T_h(t) = e^{-\lambda t}$ függvény egy nem triviális (sehol sem nulla) megoldása. Keressük meg most már az inhomogén egyenlet egy megoldását konstans $T_p(t) = d$ alakban. Rövid számolás után kapjuk, hogy ez éppen a T_k konstans. Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$T(t) = T_k + ce^{-\lambda t}$$

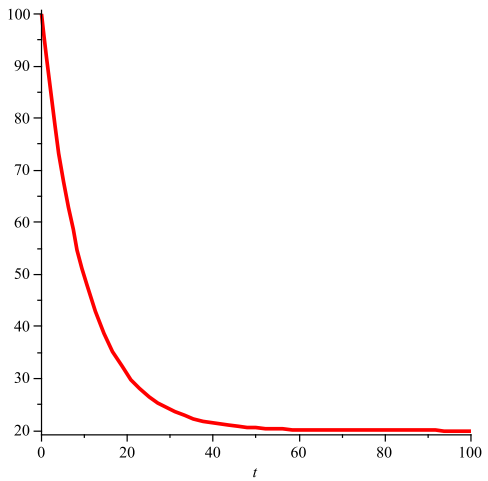
Minket most csak az a megoldás érdekel, amelyre

$$T(0) = T_0 \text{ azaz } T_0 = T_k + c$$

Tehát a keresett megoldás:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k)e^{-\lambda t}$$

Az alábbi függvény grafikon a $100\ C^\circ$-os tea hűlési görbéjét mutatja a $20\ C^\circ$ hőmérsékletű levegőn.



Tétel: A radioaktív bomlás törvénye.
Jelölje $N(t)$ egy radioaktív anyagban levő még el nem bomlott atommagok számát, T pedig a felezési időt, azaz azt az adott anyagra jellemző időt, ami idő alatt az atommagok száma a felére csökken. A radioaktív bomlás törvénye szerint ez az időtartam egy anyagi állandó, nem függ az anyagban levő atommagok számától. Valamint a törvény szerint a bomlás sebessége, az aktivitás egyenesen arányos a még el nem bomlott atommagok számával. Pontosabban:

$$N'(t) = -\frac{\ln 2}{T} N(t)$$

Ez egy homogén lineáris egyenlet. Ha N_0 jelöli a $t = 0$ időpontban az anyagban levő atomok számát, akkor

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T}$$

Ezt a formulát **exponenciális bomlási törvénynek** nevezik.

Radioaktív kormeghatározás.
Ha ismerjük a radioaktív anyag felezési idejét, valamint az elbomlott és az el nem bomlott atommagok számainak arányát egy régebbi időpontban, az anyag "keletkezésének korában", és most, az exponenciális bomlási törvény alapján ki tudjuk számolni a radioaktív anyag keletkezésének korát. Ez a "keletkezési kor" az az időpont, amikor feltételezhető, hogy a kétféle anyag arányának változása csak a radioaktív bomlás következménye. Egy élő anyagban a C_{14} szénizotóp arányát állandónak tekintjük és az élet megszűnte után az izotóp aránya csak a bomlás miatt változik. Mivel a kezdeti arányt befolyásolja a légkör aktuális állapota, pl. a vulkanikus tevékenység intenzitása, ez az úgynevezett **radiokarbon kormeghatározás** csak néhány ezer év távlatáig ad kielégítő pontosságú eredményt.

Tétel: Keverési feladat.
Egy V térfogatú tartályban víz van. A tartály alján levő nyíláson keresztül v liter/perc sebességgel folyik ki a tartályban levő folyadék, miközben a tartály feletti csapból v liter/perc sebességgel $p \quad (0 < p < 1)$ töménységű sóoldat folyik a tartályba, és ott azonnal el is keveredik. Határozzuk meg a tartályban levő sóoldat q töménységét az idő függvényében.

A tartályban a t időpontban a só koncentrációja $q(t)$, ezért Δt idő alatt a tartályból $v\Delta t q(t)$ mennyiségű só folyik ki. Mivel adott idő alatt a tartályba ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, a tartályban állandóan V liter folyadék lesz, ezért a kifolyt keverékben levő víz mennyiségével nem kell foglalkoznunk. A tartályba Δt idő alatt $v\Delta t p$ mennyiségű só kerül be a tartály feletti csapból. Tehát Δt idő alatt a tartályban levő só mennyiségének a megváltozása $v\Delta t p - v\Delta t q(t)$, a koncentráció megváltozása

$$\frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{v\Delta t p - v\Delta t q(t)}{\Delta t} = vp - vq(t)$$

lesz. A $\Delta t \to 0$ határátmenettel differenciálegyenletet kapunk a $q(t)$ függvényre:

$$q'(t) = vp - vq(t)$$

illetve átrendezés után

$$q'(t) + vq(t) = vp.$$

Ez egy elsőrendű lineáris differenciál egyenlet. A homogén rész $q'(t) + vq(t) = 0$ egy megoldása az e^{-vt} függvény. Ha az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstans alakban keressük, akkor kapjuk a p konstans függvényt, ez az az eset, amikor a koncentrációt állandó szinten tartjuk. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$q(t) = p + ce^{-vt}$$

ahol c tetszőleges valós szám. Mivel kezdetben csak víz volt a tartályban, ezért

$$q(0) = 0$$

Ha tehát az általános megoldásba behelyettesítjük a $t = 0$ időpontot, akkor kapunk c-re egy egyenletet: $0 = p + c$, azaz $c = -p$. A keresett megoldás tehát

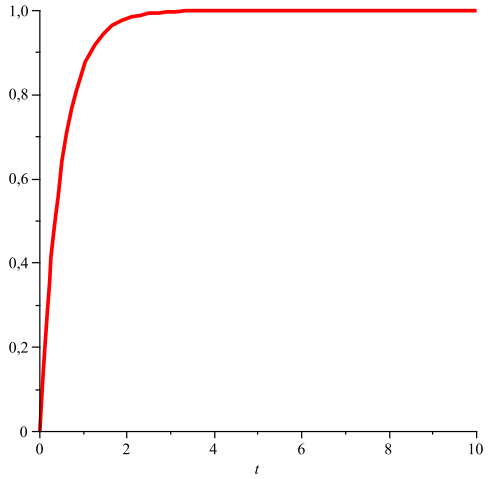
$$q(t) = p - pe^{-vt}$$

vagy másképp írva

$$q(t) = p(1 - e^{-vt}).$$

Látni tehát, hogy az ideális stabil állapotot, amikor a koncentráció nem változik, soha nem érhető el. Persze a megoldás t függvényében olyan gyorsan tart a konstans p függvényhez, hogy elég rövid idő után a koncentráció változása nem mérhető és így állandónak tekinthető. De ha például benzinhez kevernek adalékanyagokat az oktánszám növelése miatt, hát elég rosszul jár az az autós, aki a folyamat elején tankol.

Az alábbi függvény grafikon a $p = 1,\ v = 2$ esetben ábrázolja a folyamatot:



Látni tehát, hogy két perc elteltével a koncentráció lényegében nem változik.

20.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: **Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet.** Az

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

alakú differenciálegyenleteket **másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteknek** nevezzük.

Tétel: Ha y_1 és y_2 két megoldása az $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ homogén egyenletnek, c_1 és c_2 két tetszőleges valós szám, akkor az

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

is megoldása a homogén differenciálegyenletnek.

Megjegyzés: A fenti állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy adott (másodrendű) homogén differenciálegyenlet megoldásai a függvények közötti összeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve **lineáris vektorteret** alkotnak. A következő állítás azt mondja ki, hogy ennek a vektortérnek a dimenziója kettő.

Tétel: Az $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlethez mindig található két megoldás, y_1 és y_2 úgy, hogy az egyenlet összes megoldása az

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

alakú függvények, ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.

Definíció: Alaprendszer.
A fenti állításban szereplő két függvényt a lineáris differenciálegyenlet **alaprendszerének** nevezzük. Tehát az y_1, y_2 függvény pár az $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet **alaprendszere**, ha az egyenlet minden megoldása előáll $y = c_1y_1 + c_2y_2$ alakban.

Tétel: Az $y''+f(x)y'+g(x)y = 0$ másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet két megoldása, y_1, y_2 pontosan akkor alaprendszer az (a, b) intervallumon, ha a

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Wronski-féle determináns sehol sem nulla.

Definíció: Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet.
Az $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ alakú differenciálegyenleteket **másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenleteknek** nevezzük ha a $h(x)$ függvény nem azonosan nulla.

Tétel: Ha y_p az $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ inhomogén egyenletnek egy (partikuláris) megoldása, y_1, y_2 pedig a megfelelő $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ homogén egyenlet egy alaprendszere, akkor az inhomogén egyenlet összes megoldása az

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

alakú függvények.

A fenti állítás azt mondja ki, hogy az inhomogén egyenlet tetszőleges megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy egy rögzített partikuláris megoldáshoz hozzáadjuk a homogén egyenlet egy tetszőleges megoldását.

Definíció: Másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet.
Ha a és b két valós szám, $f(x)$ pedig egy valós függvény, akkor az

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

alakú differenciálegyenletet **másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

Definíció: Karakterisztikus egyenlet.
Az előző egyenletből adódó $y'' + ay' + by = 0$ másodrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásait keressük $y(x) = e^{\lambda y}$ alakban. Ha a keresett $y(x)$ függvényt behelyettesítjük az egyenletbe, akkor

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

egyenletet kapjuk. A baloldalon szereplő szorzat csak úgy lehet nulla, ha az első tényezője nulla. Így λ-ra a következő másodfokú un. **karakterisztikus egyenletet** kapjuk:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Tétel: A karakterisztikus egyenlet segítségével mindig megkaphatjuk a $y''+ay'+by = 0$ homogén egyenlet egy alaprendszerét, mégpedig a következő módon:

- *Ha λ_1 és λ_2 a karakterisztikus egyenlet két különböző valós gyöke, akkor a homogén egyenlet alaprendszere:*
$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ és } y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$
- *Ha λ a karakterisztikus egyenlet kétszeres valós gyöke, akkor a homogén egyenlet alaprendszere:*
$$y_1 = e^{\lambda x} \text{ és } y_2 = xe^{\lambda x}.$$

- *Ha $\lambda = \alpha + \beta i$ a karakterisztikus egyenlet egy komplex gyöke, akkor a homogén egyenlet alaprendszere:*
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ és } y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Jegyezzük meg, hogy a harmadik esetben a karakterisztikus egyenlet komplex gyökei egymás konjugáltjai. Ezért a két komplex gyök ugyanazt az alaprendszert szolgáltatja.

Tétel: Az $y'' + ay' + by = f(x)$ másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet egy y_p partikuláris megoldását általában (nem mindig) megkaphatjuk az un. **próbafüggvény módszer** segítségével, azaz a megoldást speciális alakú függvények közt keressük. A leggyakoribb esetek:

- ha $f(x)$ egy n-ed fokú polinom, akkor y_p-t is ilyen alakban keressük;
- ha $f(x) = a\cos kx + b\sin kx$, akkor $y_p = A\cos kx + B\sin kx$;
- ha $f(x) = e^{kx}$ és k nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $y_p = Ae^{kx}$;
- ha $f(x) = e^{kx}$ és k egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $y_p = Axe^{kx}$;
- ha kétszeres, akkor $y_p = Ax^2e^{kx}$;

Tétel: A harmonikus rezgőmozgás.
Tegyük fel hogy az egyenesen mozgó m tömegű pontszerű testre minden pillanatban az origótól való távolsággal arányos és a mozgás irányával ellentétes irányú erő hat, például egy rugóra függesztett test mozog így, ha az erő a gravitációs erő. Ekkor a t időtől függő **harmonikus rezgőmozgást leíró egyenlet**

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t),$$

ahol $\ddot{x}$ az $x(t)$ függvény idő szerinti második deriváltjának egy, a fizikában gyakori jelölése, k pedig az un. **rugóállandó**.

Ez egy másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, tudniillik ha bevezetjük a $\frac{k}{m} = \omega^2$ jelölést, ahol ω az un. **körfrekvencia**, akkor az egyenlet átrendezés után

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

A fenti homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Ennek az egyenletnek az egyik komplex gyöke ωi és így a homogén egyenlet megoldásai az

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$$

függvények. Vezessük be még az $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ **amplitúdót** és azt a φ **fázisszöget**, amelyre $\sin\varphi = \frac{c_1}{A}$ és $\cos\varphi = \frac{c_2}{A}$. Így az egyenlet általános megoldását felírhatjuk

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

alakban. A harmonikus rezgőmozgás **periódusidejét** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ jelöli.

20.3. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek

Egy pont mozgását a legegyszerűbb esetben a pillanatnyi sebesség és hely közötti összefüggés, egy lineáris differenciálegyenlet írja le. De egy pont általában a térben mozog, nem pedig egy egyenesen. Ezért pályáját

három függvény, a koordinátafüggvények írják le. És persze a pillanatnyi sebesség is vektorértékű. Ez indokolja, hogy szimultán vizsgáljunk differenciálegyenleteket azaz differenciálegyenlet rendszereket.

Definíció: **Vektor-skalár függvény** vagy **n-dimenziós görbe.**
Jelöljön $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ egy egy változós vektor értékű leképezést. Egy ilyen leképezést **vektor-skalár függvénynek** vagy **n dimenziós görbének** nevezünk. Ennek értéke koordináta függvényekkel leírva:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Ha most $\dot{x}_i$ jelöli az i-edik koordináta függvény deriváltját, akkor $\dot{x}$ a **görbe deriváltja** koordinátákkal felírva:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

Definíció: **Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer.**
Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, $\mathbf{b}$ pedig egy n dimenziós görbe. Ekkor az

$$\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakú egyenletet **állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszernek** nevezzük. Ha itt $\mathbf{b}(t)$ azonosan nulla, akkor a rendszer **homogén**, egyébként **inhomogén**.

Tétel: Ha A egy $n \times n$-es mátrix, akkor az $L = \{\mathbf{x} : \dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ halmaz, azaz a homogén egyenletrendszer megoldásai lineáris vektorteret alkotnak az összeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve. Ennek a vektortérnek a dimenziója éppen n.

Definíció: **Alaprendszer.** Az $\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásaiból álló vektortér egy tetszőleges bázisát **alaprendszernek** nevezzük.

Tétel: Ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ az $\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer egy alaprendszere, akkor az

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n : c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

alakú görbék a homogén egyenletrendszer összes megoldását adják meg.

Tétel: Ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ az $\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer egy alaprendszere, $\mathbf{x}_p$ pedig az $\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása, akkor az inhomogén differenciálegyenlet rendszer összes megoldása az

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

alakú függvények.

Tétel: Tegyük fel, hogy az A $n \times n$-es mátrixnak van n darab $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sajátvektora $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (nem feltétlenül különböző) sajátértékkel úgy, hogy a sajátvektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ez például szimmetrikus A mátrix esetén mindig igaz. Ekkor az $\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer egy alaprendszere

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n(t) = e^{-\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

21. Többváltozós leképezések

21.1. Térgörbék

Definíció: Térgörbe.
Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum. Egy $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ típusú leképezést **térgörbének** nevezünk. A leképezés független változóját a "paramétert" általában t-vel jelöljük. Az $\mathbf{r}(t)$ görbe koordinátafüggvényeit $x(t),\ y(t),\ z(t)$ jelöli. Tehát

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Szokás még a térgörbét sor alakban is írni:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Definíció: Zárt görbe.
Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbe **zárt**, ha $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, azaz a görbe **kezdőpontja** megegyezik a görbe **végpontjával**.

Definíció: Egyszerű görbe.
Az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbe **egyszerű**, ha $\mathbf{r}$ az (a,b) nyílt intervallumon egy-egy értelmű.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe **folytonos**, ha minden koordinátafüggvénye folytonos.

A görbe **deriválható** a $t \in (a,b)$ pontban, ha itt x, y, z deriválható. Ekkor az $\mathbf{r}$ deriváltját

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

vagy

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

jelöli.

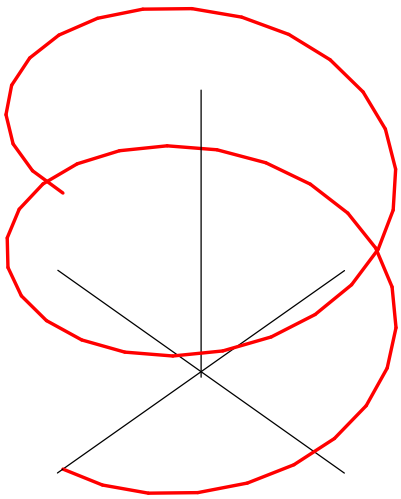
Az $\mathbf{r}$ térgörbe $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ pontjában húzott **érintő** az az egyenes, amelyik átmegy az $\mathbf{r}_0$ ponton és iránya megegyezik az $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$ vektor irányával.

Az $\dot{\mathbf{r}}$ irányú $\mathbf{t}$ egységvektort **tangenciális egységvektornak** nevezzük. Tehát

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

A következő ábrán a **közönséges csavarvonalat** látjuk. Ez egy olyan pont mozgását írja le, amelyik egyenletesen forog a z tengely körül és közben állandó sebességgel emelkedik,

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t \cdot \mathbf{i} + R\sin t \cdot \mathbf{j} + vt \cdot \mathbf{k}$$



Definíció: Beírt poligon.
Legyen $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ egy térgörbe, $F = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ pedig az $[a,b]$ intervallum egy felosztása. Azt a térbeli P poligont (egymáshoz csatlakozó szakaszok sorozata), amelynek csúcsai sorrendben az $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) \quad i = 0,1,\ldots,n$ pontok, az F felosztáshoz tartozó **beírt poligonnak** nevezzük. A poligon hossza az oldalak (szakaszok) hosszának az összege:

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$$

Definíció: Ívhossz.
Az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe **ívhossza** az a legkisebb szám amelyik minden beírt poligon hosszánál nagyobb vagy egyenlő.

Az $\mathbf{r}$ térgörbe **rektifikálható**, ha ez az ívhossz véges.

Tétel: Ívhossz kiszámolása.
Tegyük fel, hogy az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe folytonosan deriválható (ennél valamivel gyengébb feltétel is elég lenne). Ekkor a görbe rektifikálható és

$$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

21.2. Síkgörbék

Definíció: Síkgörbe.
Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum. Egy $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ típusú leképezést **síkgörbének** nevezünk. Az $\mathbf{r}(t)$ görbe koordinátafüggvényeit $x(t),\ y(t)$ jelöli. Tehát

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

vagy sor alakban is írva:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Megjegyzés: A folytonosság, derivált, ívhossz értelemszerűen átvihető síkgörbére is. Így például egy folytonosan deriválható $\mathbf{r}(t)$ görbe ívhossza:

$$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}\,|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Külön megvizsgáljuk azt az esetet, amikor egy síkgörbe valójában egy **függvény grafikonja**. Most a paramétert x-el jelölve az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ grafikonját a síkban a

$$\mathbf{r}\,(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

görbe írja le. Behelyettesítve az ívhossz képletébe:

Tétel: Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény grafikonjának ívhossza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\,dx$$

Megjegyzés:
Az előzőekben definiált tér és síkgörbék nem fedik pontosan azt a geometriai fogalmat, amelyet elvárunk. Tekintsük például az origó középpontú (síkbeli) C egységkört. Ezt a görbét megadhatjuk az

$$\mathbf{r} = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j}\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

leképezés segítségével. De például ugyanezt a kört kapjuk a

$$\mathbf{r} = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j}\,, \qquad \frac{\pi}{3} \le t \le 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

leképezés esetén is.

Más szóval ugyanazt a C görbét különböző leképezések segítségével is megadhatjuk. Ez azt jelenti, hogy szükség lenne a szobajövő leképezések osztályozására aszerint, hogy ugyanazt a görbét adják-e meg. Ennek az osztályozásnak a definíciója és vizsgálata túl megy ennek az előadásnak a keretein.

21.3. Felületek

Definíció: **Felület.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ egy "egyszerű" síkidom (ez a gyakorlatban körlapot vagy téglalapot jelent). Egy $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ típusú leképezést **felületnek** nevezzük. A leképezés független változóit a "paramétereket" általában u és v jelöli. A felület koordinátafüggvényei az A- értelmezett $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ kétváltozós függvények. Tehát

$$\mathbf{r}\,(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

vagy sor alakban írva

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ felület **folytonos**, ha minden koordinátafüggvénye folytonos mint kétváltozós függvény.

Ha a koordinátafüggvények parciálisan deriválhatóak, akkor az $\mathbf{r}$ felület is **parciálisan deriválható** és

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}\,.$$

Használjuk még a valamivel tömörebb

$$\mathbf{r}'_u = x'_u\mathbf{i} + y'_u\mathbf{j} + z'_u\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{r}'_v = x'_v\mathbf{i} + y'_v\mathbf{j} + z'_v\mathbf{k}$$

jelöléseket.

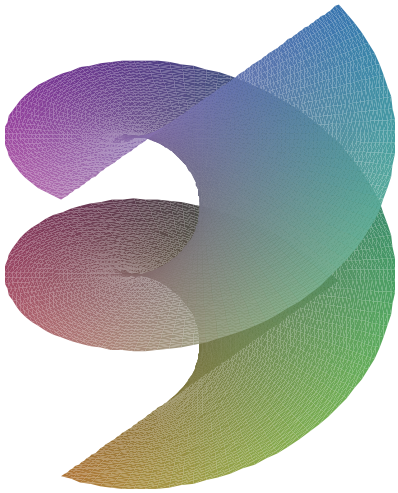
Az $\mathbf{r}$ felület $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ pontjára illeszkedő, az $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ és $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ vektorok által kifeszített síkot az $\mathbf{r}$ felület $\mathbf{r}_0$ pontjában húzott **érintősíknak** nevezzük. Ennek a síknak a normálisa az un. **felületi normális** az

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$$

vektor.

Megjegyzés: A következő ábra az **Arkhimédeszi csavarfelületet ábrázolja**. Ferdén megdöntve és megforgatva vízemelésre használták már az ókorban is. A felület egyenlete:

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos(\omega v) \cdot \mathbf{i} + u\sin(\omega v) \cdot \mathbf{j} + cv \cdot \mathbf{k}$$



Definíció: Felszín.
Legyen $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ egy felület a térben. Az ívhossz mintájára szeretnénk definiálni a felület egy mérőszámát a **felszínt**. A térben három pont mindig meghatároz egy háromszöglapot, amelynek területe az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oldalvektorokkal leírva $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. A beírt poligonok mintájára bevezetjük a **beírt poliéder** fogalmát: ez olyan poliéder, amelynek lapjai **háromszögek**, csúcsai pedig a felületen helyezkednek el. Az P beírt poliéder felszíne, $F(P)$, a poliédert alkotó háromszögek területeinek összege. Így tehát az $\mathbf{r}$ felület $F = F(\mathbf{r})$ **felszíne** az a legkisebb szám, amelyik nagyobb vagy egyenlő minden beírt poliéder felszínénél.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a definíció nem korrekt. H. Schwarz híres példájában egy egyszerű körhengerpalást esetében is található beírt poliédereknek egy olyan P_n sorozata, amelyre $F(P_n) \to \infty$. Ebben a sorozatban a problémát az okozza, hogy a háromszögek szögei között akármilyen kicsi szög, azaz akármilyen "lapos" háromszög is előfordul. Ha ezt a lehetőséget kizárjuk (aminek pontos megfogalmazása bonyolult), eljuthatunk a felszín korrekt definíciójához.

Tétel: Felszín kiszámolása. Ha az $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ felület folytonosan deriválható, akkor a felületnek van (véges) felszíne és

$$F = \iint_A |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv$$

Tétel: Függvénygrafikon felszíne. Tekintsünk egy $f : A \to \mathbb{R}$ kétváltozós folytonosan deriválható függ-

vényt. A függvény grafikonját a háromdimenziós térben az

$$\mathbf{r}\,(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

felület írja le. Így a függvény grafikonjának a felszíne:

$$\iint\limits_A \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy$$

21.4. Skalármező

Definíció: A skalármező definíciója.
Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$. Egy $u : G \to \mathbb{R}$ típusú leképezést **skalártérnek** illetve **skalármezőnek** nevezünk. A skalármező független változóját $\mathbf{r}$ -el jelöljük, így a felvet értéket $u(\mathbf{r}\,)$ jelöli. De egy skalármező tekinthető egyszerűen egy háromváltozós függvénynek is és így $u(x,y,z)$ alakban is írhatjuk.

A skalármező **folytonossága** nem új fogalom, ha mint háromváltozós függvényt tekintjük. De azért ismételjük meg itt is a definíciót:
Az $u : G \to \mathbb{R}$ skalármező **folytonos az a $\in G$ pontban**, ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathbf{r} \in G, |\mathbf{r} - \mathbf{a}\,| < \delta \text{ esetén } |u(\mathbf{r}\,) - u(\mathbf{a}\,)| < \varepsilon.$$

Az $u(\mathbf{r}\,) = u(x,y,z)$ skalármező **parciális deriváltjai** a megfelelő háromváltozós függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}\,)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{u(\mathbf{r}+t\mathbf{i}\,)-u(\mathbf{r}\,)}{t}, \quad \frac{\partial u(\mathbf{r}\,)}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{u(\mathbf{r}+t\mathbf{j}\,)-u(\mathbf{r}\,)}{t}, \quad \frac{\partial u(\mathbf{r}\,)}{\partial z} = \lim_{t\to 0}\frac{u(\mathbf{r}+t\mathbf{k}\,)-u(\mathbf{r}\,)}{t}.$$

Természetesen a parciális deriváltakat jelölhetjük $u'_x,\ u'_y,\ u'_z$ módon is.

Az $u(\mathbf{r}\,)$ skalármező **gradiense** a parciális deriváltakból álló vektor:

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

illetve

$$\operatorname{grad} u = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k}\,.$$

Skalármező például az egységnyi elektrosztatikai töltés potenciáltere:

$$u(\mathbf{r}\,) = \frac{1}{|\mathbf{r}\,|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Ennek a skalártérnek a gradiense:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}\,) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}\,|^3}$$

Definíció: Kétváltozós skalármező.
Egy $u : A \to \mathbb{R}$ leképezést **kétváltozós skalármezőnek** nevezzük, ha $A \subset \mathbb{R}^2$ egy síkidom. A folytonosság

és a parciális deriváltak fogalma természetes módon adódik. Viszont a parciális deriváltakból álló síkvektort **nem szokás** gradiensnek nevezni!

21.5. Vektormező

Definíció: A vektormező definíciója.
Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$. Egy $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ leképezést **vektormezőnek** nevezünk. A független változót általában $\mathbf{r}$ jelöli, vektormező értékét az $\mathbf{r}$ pontban pedig $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ha a $\mathbf{v}$ vektormező koordinátafüggvényeit $v_x,\ v_y,\ v_z$ jelöli. akkor sor alakban írva:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

Ha tér pontjaihoz az egységnyi töltés által keltett térerősséget rendeljük, megkapjuk az **elektrosztatikus teret:**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Ennek koordináta függvényei:

$$E_x = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \qquad E_y = \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \qquad E_z = \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

Definíció: Nyílt halmaz.
Egy $G \subset \mathbb{R}^3$ halmazról azt mondjuk, hogy **nyílt halmaz**, ha minden $\mathbf{a} \in G$ pontjára igaz, hogy egy egész környezete is része G-nek, azaz

$$\forall \mathbf{a} \in G\ \exists \delta > 0\ B(\mathbf{a}, \delta) \subset G.$$

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, mindig feltesszük, hogy a szereplő vektormezőknek és skalármezőknek az értelmezési tartománya nyílt halmaz.

Definíció: Tenzor.
A homogén lineáris vektormezőket **tenzoroknak** nevezzük. Tehát az $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés tenzor, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$$\mathbf{A}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\,\mathbf{a} + \mathbf{A}\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \mathbf{A}\,\mathbf{a}$$

Az $\mathbf{A}$ tenzor egyértelműen azonosítható egy 3×3-as A mátrixszal.

Definíció: Vektormező folytonossága.
A $\mathbf{v}$ vektormező **folytonos** az $\mathbf{r}$ pontban, ha koordinátafüggvényei mint háromváltozós függvények folytonosak az $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ pontban.

Definíció: Derivált tenzor.
Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}$ vektormező értelmezett az $\mathbf{a}$ pont egy egész környezetében. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ **vektormező deriváltja létezik az $\mathbf{a}$ pontban** és ez az $\mathbf{A}$ **deriválttenzor** illetve a megfelelő A **deriváltmátrix**, ha

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{a}| \to 0} \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{r} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = 0$$

A deriválttenzor fenti definíciója azt mondja ki, hogy akkor deriválható a $\mathbf{v}$ vektornmező az $\mathbf{a}$ pontban, ha megadható egy olyan A mátrix, amelyre a

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(a) + A(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

lineáris kifejezés "jól" közelíti a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőt az $\mathbf{a}$ pontban. Ez annak felel meg, mint amikor az egyváltozós függvény deriváltját az érintő egyenes meredekségével definiáljuk.

Tétel: Ha a $\mathbf{v}$ vektormező deriválható az $\mathbf{a}$ pontban, akkor itt folytonos.

Tétel: **A deriválttenzor kiszámolása.** Ha $\mathbf{v}$ deriválható az $\mathbf{a}$ pontban és a deriváltmátrixa A, akkor a $v_x,\ v_y,\ v_z$ koordinátafüggvények parciális deriváltjai léteznek az $\mathbf{a}$ pontban és

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v_x & \frac{\partial}{\partial y} v_x & \frac{\partial}{\partial z} v_x \\ \frac{\partial}{\partial x} v_y & \frac{\partial}{\partial y} v_y & \frac{\partial}{\partial z} v_y \\ \frac{\partial}{\partial x} v_z & \frac{\partial}{\partial y} v_z & \frac{\partial}{\partial z} v_z \end{pmatrix}$$

azaz az A mátrix soraiban a megfelelő koordinátafüggvények parciális deriváltjai állnak.

Megjegyzés: Az előző állítás nem fordítható meg! Azért, mert a koordinátafüggvények parciális deriváltjai léteznek, még nem biztos, hogy a vektormező deriválható, sőt még az se biztos, hogy folytonos.

Tétel: Ha a $\mathbf{v}$ vektormező koordinátafüggvényei folytonosan deriválhatóak az $\mathbf{a}$ pontban, akkor $\mathbf{v}$ deriválható $\mathbf{a}$-ban.

21.6. Divergencia, rotáció

Definíció: **Divergencia.**
Ha egy áramló folyadékba belemártunk egy "pici" testet, akkor megmérhetjük a test felületén beáramló illetve kiáramló folyadék mennyiségét. Ez a két érték általában egyensúlyban van, azaz az összegük nulla. De például ha a test belsejében egy forrás vagy egy nyelő (pl. kádlefolyó) van, akkor lehet az egyenleg pozitív illetve negatív. Ha a $\mathbf{v}$ áramlási tér egy adott $\mathbf{p}$ pontja köré teszünk egyre kisebb térfogatú és felszínű testet, akkor a mért értékek határértékeként megkapjuk a $\mathbf{v}$ vektormező **divergenciáját** a $\mathbf{p}$ pontban és $\operatorname{div}\mathbf{v}$-vel jelöljük. Ezt a fizikában a vektormező **forráserősség-sűrűségének** nevezik.

Definíció: **Rotáció.**
Ha a szilárd testet hagyjuk mozogni, pontosabban forogni az áramlás örvénylésének hatására, akkor ezt a forgást jellemezhetjük egy vektorral: a vektor iránya a forgástengely iránya, hossza pedig a szögsebesség. Ha most egy adott $\mathbf{p}$ pontra húzódó testeket tekintünk, akkor határértékként megkapjuk a $\mathbf{v}$ vektormező **rotációját** a $\mathbf{p}$ pontban és $\operatorname{rot}\mathbf{v}$-vel jelöljük. Ezt a fizikában a vektormező **örvényerősség-sűrűségének** nevezik.

Tétel: **A divergencia kiszámolása.** Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonosan deriválható, akkor

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

azaz a deriváltmátrix főátlójában szereplő elemek összege, a **mátrix nyoma**.

Tétel: **A rotáció kiszámolása.** Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonosan deriválható, akkor

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

21.7. Nabla és Laplace operator

Definíció: **Nabla vektor.**
A ∇ jellel egy un. vektoroperátort a **nabla operátort** jelölünk. Nevét egy föníciai eredetű húros hangszerről kapta. Ezt szimbolikus vektorként írhatjuk fel:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ha vektorműveletek során az egyik koordinátája mellé egy háromváltozós függvény kerül "szorzóként", akkor azon a helyen a megfelelő parciális deriváltat értjük. A nabla vektor segítségével könnyen megjegyezhető és jól használható formulákat kapunk.

Definíció: Laplace-operator. A ∇^2 operátort **Laplace-operátornak** nevezzük és Δ-val jelöljük. Tehát ha u egy skalármező, akkor

$$\Delta u = \nabla(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Tétel: A nabla vektor használata.

- **Gradiens.** Ha u egy deriválható skalártér, akkor

  $$\operatorname{grad} u = \nabla u$$

  a ∇ vektornak az u skalárral való szorzata.

- **Divergencia, rotáció.** Ha $\mathbf{v}$ egy folytonosan deriválható vektortér, akkor

  $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}\,.$$

- Ha u kétszer folytonosan deriválható skalármező, akkor

  $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}\,, \qquad \Delta u = \nabla(\nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

- Ha $\mathbf{v}$ kétszer folytonosan deriválható vektormező (azaz a koordinátafüggvények kétszer folytonosan deriválhatóak), akkor

  $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \qquad \Delta \mathbf{v} = \nabla(\nabla \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}\,.$$

22. Vonalintegrál

22.1. A vonalintegrál definíciója

Tömegpont munkavégzése erőtérben:
Legyen $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ egy vektormező. Ez a tér minden pontjában az egységnyi tömegre ható erőt adja meg, ezért szokás **erőtérnek** is nevezni. Ha most egy pontszerű tömeg az erőtér hatására egy $\mathbf{r} : [a, b] \to G$ görbén mozog, hogyan számolható ki a az erő munkavégzése? Ha ez a görbe egy szakasz és az erő minden pontban ugyanaz (állandó) akkor tudjuk, hogy a munka a szakaszt megadó vektor és az erő skalárszorzata. A fizika törvényeiből az is következik, hogy ha az $\mathbf{r}$ görbe egy poligon, a $\mathbf{v}$ pedig állandó a poligon élein, akkor a munka a szakaszonként számított munkák összege, a munka "additív". Legyen most $\mathbf{r}$ egy tetszőleges görbe, P egy beírt poligon. Ha a poligon élein az erőt helyettesítjük egy, a megfelelő görbedarabon felvett állandó értékkel, azaz az erőteret konstansnak vesszük a poligon élein, akkor a végzett munka egy közelítését kapjuk. Nyilván minél finomabb felosztáshoz tartozó beírt poligont veszünk, annál pontosabban közelítjük a tényleges munkát.

Definíció: Integrálközelítő összeg.
Legyen $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ egy vektormező, C pedig egy G-beki rektifikálható görbe amelyet az $\mathbf{r} : [a, b] \to G$ leképezés ad meg. Legyen továbbá $F = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, $K = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ pedig közbenső helyek egy sorozata. Ekkor a

$$\sigma_{F,K} = \sum_i^n \mathbf{v}\,(c_i)\,(\mathbf{r}\,(t_i) - \mathbf{r}\,(t_{i-1}))$$

számot **integrálközelítő összegnek** nevezzük. Ha bevezetjük a $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}\,(c_i)$ és $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}\,(t_i)$ illetve $\triangle\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ jelöléseket, akkor

$$\sigma_{F,K} = \sum_i^n \mathbf{v}_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) = \sum_i^n \mathbf{v}_i\,\triangle\mathbf{r}_i.$$

Definíció: A vonalintegrál definíciója.
Ha $F = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása akkor
$= d(F) = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1,2, \ldots, n\}$
jelöli az F felosztás **finomságát**.
Azt mondjuk, hogy az F felosztás **finomabb δ-nál**, ha $d(F) < \delta$.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormező vonalintegrálja létezik az $\mathbf{r} : [a, b] \to G$ által megadott C rektifikálható görbén és a vonalintegrál értéke az I szám, ha

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0, \text{úgy, hogy } d(F) < \delta \text{ és tetszőleges } K \text{ esetén} |\sigma_{F,K} - I| < \varepsilon.$$

Ezt az I számot $\int\limits_C \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$ jelöli. Ha az $\mathbf{r}$ görbe zárt görbe, akkor szokás az integrált körintegrálnak is nevezni és $\oint\limits_C \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$ -el jelölni.

Szokás még a vonalintegrált a következőképpen is jelölni:

$$\int\limits_C \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int\limits_C v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

Definíció: Vonalintegrál síkgörbén.
A térgörbéken vett vonalintegrál definíciója természetes módon átvihető síkgörbékre is ha a vektormező helyett egy "síkbeli" vektormezőt értünk, azaz egy $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^2$ leképezést, ahol $G \subset \mathbb{R}^2$ egy "egyszerű" síkbeli halmaz. Ekkor a vonalintegrál szokásos jelölése:

$$\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_C v_x\, dx + v_y\, dy$$

22.2. A vonalintegrál tulajdonságai

Tétel: Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonos és a C görbe folytonos és rektifikálható, akkor a $\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r}$ vonalintegrál létezik.

Tétel: A vonalintegrál kiszámolása.
Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonos és az $C = \mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ görbe folytonosan deriválható (és ezért rektifikálható), akkor a vonalintegrált kiszámolhatjuk egy közönséges Riemann-integrál segítségével:

$$\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{v}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}\left(t\right) dt.$$

Definíció: Egymáshoz csatlakozó görbék.
Azt mondjuk, hogy a $C_1 = \mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ és a $C_2 = \mathbf{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ görbék **egymáshoz csatlakozó görbék**, ha $b = c$, azaz a C_1 görbe végpontja megegyezik a C_2 görbe kezdőpontjával. Ilyenkor definiálhatunk egyetlen görbét, a két csatlakozó görbe **összegét:**

$$\mathbf{r}\left(t\right) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & \text{ha } a \le t \le b \\ \mathbf{r}_2(t) & \text{ha } b = c \le t \le d \end{cases}.$$

Az ennek a görbének megfelelő C "görbeosztályt" $C = C_1 + C_2$ jelöli.

Definíció: Ellentétes irányítású görbe.
Ha $C = \mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ egy görbe, akkor $-C$ jelöli azt a görbét, amelynek pontjai ugyanazok, mint C-nek, de "irányítása" az ellenkező, a kezdő és a végpont felcserélődik. Egy ilyen görbét például a

$$\mathbf{p}\left(t\right) = \mathbf{r}\left(a + b - t\right), \qquad a \le t \le b$$

leképezéssel kaphatunk.

Tétel: A vonalintegrál tulajdonságai.

- Ha $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ két vektormező, amelyeknek a vonalintegrálja létezik a $C = \mathbf{r}$ görbén, akkor létezik a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ integrálja is és
$$\int_C (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v}_1 d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{v}_2 d\mathbf{r}$$
- Ha az $\mathbf{v}$ vektormező vonalintegrálja létezik a $C = \mathbf{r}$ görbén és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, akkor létezik a $\lambda\mathbf{v}$ integrálja is és
$$\int_C (\lambda\mathbf{v}) d\mathbf{r} = \lambda \int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r}$$

- Egymáshoz csatlakozó görbéken a vonalintegrál additív, azaz

$$\int\limits_{C_1+C_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{C_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} + \int\limits_{C_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{r}$$

- Ha a görbe irányítását ellenkezőjére változtatjuk, az integrál (-1)-el szorzódig, azaz

$$\int\limits_{-C} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{C} \mathbf{v}\, d\mathbf{r}$$

22.3. Konzervatív vektormező

Definíció: Vektormező primitív függvénye.
Azt mondjuk, hogy az $u : G \to \mathbb{R}$ skalármező **primitív függvénye** a $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormezőnek a $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon, ha a G minden pontjában

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{v}\,.$$

Ilyenkor a $\Phi = -u$ függvényt **potenciálnak** nevezik.

Ha a $\mathbf{v}$ vektormezőnek van primitív függvénye, akkor a vektormezőt (erőteret) **konzervatívnak** nevezzük.

Tétel: A primitív függvények csak konstansban különböznek, azaz ha $u_1(\mathbf{r})$ és $u_2(\mathbf{r})$ két primitív függvénye a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőnek, akkor $u_1 - u_2$ konstans, nem függ $\mathbf{r}$-től.

Tétel: Newton-Leibniz-formula vonalintegrálokra.
Ha a $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező primitív függvénye az u skalármező, akkor minden $C = \mathbf{r} : [a, b] \to G$ folytonos és rektifikálható görbe esetén

$$\int\limits_{C} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}(b)) - u(\mathbf{r}(a)).$$

Ha az előző tételben $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ jelöli a görbe kezdőpontját, $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ pedig a végpontját, akkor

$$\int\limits_{C} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}).$$

Ez azt jelenti, hogy konzervatív erőtér esetén a **vonalintegrál független az úttól**, csak a görbe végpontjaitól függ.

Tétel: Legyen $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ egy vektormező. A következő állítások ekvivalensek:

- A $\mathbf{v}$ vektormezőnek van primitív függvénye.
- A vonalintegrál független az úttól.
- Minden zárt görbén a vonalintegrál nulla.

Tétel: Ha a $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormező folytonosan deriválható és $\mathbf{v}$-nek van primitív függvénye, akkor a vektormező **örvénymentes** azaz

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}\,.$$

Ez a tény annak következménye, hogy ha u egy primitív függvény, akkor $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}$.

Megjegyzés:
Azt a tényt, hogy $\mathbf{v}$ örvénymentes, úgy is szokás mondani, hogy a $\mathbf{v}$ vektormező **keresztbe vett deriváltjai megegyeznek**, hiszen a $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a következő azonosságokat jelenti:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

A két dimenzióban ez a tény egyetlen azonosságot jelent:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy az örvénymentesség nem elégséges feltétele annak, hogy legyen primitív függvény. Ha

$$v_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad v_y = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

akkor az origó körüli R sugarú C körvonalon a körintegrál

$$\oint_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = -2\pi \neq 0$$

pedig a keresztbe vett deriváltak megegyeznek. A problémát az okozza, hogy ezek a zárt görbék körbe vesznek egy olyan pontot, ahol a vektormező nincs értelmezve, azaz az értelmezési tartomány "lyukas". A térben ennek a "lyuknak" egy egész egyenes illetve egy "végtelen görbe" felel meg. Ha a vektormező G értelmezési tartománya "nem lyukas", akkor G-t **egyszeresen összefüggő tartománynak** nevezzük. Ennek a tulajdonságnak a pontos definíciója túlmegy az előadás lehetőségein.

Tétel: Minden konvex sík és téridom egyszeresen összefüggő.

Tétel: Ha $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan deriválható örvénymentes vektormező a G egyszeresen összefüggő tartományon, akkor $\mathbf{v}$-nek van primitív függvénye.