Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék 1

I. Első félévi feladatok 2

1. Egyenlőtlenségek 3

2. Koordinátarendszerek 5

3. Sík és térvektorok 6

4. Koordinátageometria 7

5. Lineáris egyenletrendszerek 8

6. Komplex számok 9

7. A függvény fogalma 11

8. Határérték, folytonosság 13

9. Differenciálszámítás 18

10. Többváltozós függvények 22

11. Primitív függvény, határozatlan integrál 25

12. Határozott integrál 28

13. A határozott integrál alkalmazásai 29

II. Második félévi feladatok 30

14. Többváltozós függvények integrálása 31

15. Számsorozatok konvergenciája 33

16. Numerikus sorok 35

17. Hatványsorok, Taylor sor 36

18. Fourier-sorok 38

19. Lineáris vektorterek 41

20. Differenciálegyenletek 43

21. Többváltozós leképezések 46

22. Vonalintegrál 47

Megoldások 48

I. rész

Első félévi feladatok

1. Egyenlőtlenségek

Ábrázoljuk számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

1.1. $|x-5|<3$ **1.2.** $|5-x|<3$ **1.3.** $|x-5|<1$ **1.4.** $|5-x|<1$

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok körében!

1.5. $\dfrac{1}{5x+6} \geq -1$

1.6. $|2x-1|<|x-1|$

1.7. $6x^2+7x-20>0$

Oldjuk meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

1.8. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=0$

1.9. $\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right| > \dfrac{1}{2}$

1.10. $|2x-1|<|x-1|$

1.11. $\sqrt{x+3}+|x-2|=0$

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

1.12. $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

1.13. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

1.14. Hol a hiba?

$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \frac{1}{2}$ és $2<4$ — Összeszorozva:

$2\log_2 \frac{1}{2} < 4\log_2 \frac{1}{2}$ — A logaritmus azonosságait használva:

$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$ — A $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő, tehát:

$\frac{1}{4} < \frac{1}{16}$ — Átszorozva az egyenlőtlenséget:

$16<4$

1.15. Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat?

(a) Minden 9-cel osztható négyzetszám osztható 3-mal.

(b) Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel és 4-gyel.

(c) Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel vagy 4-gyel.

(d) Minden 2-re végződő négyzetszám páratlan.

(e) A 0 páros szám.

(f) Van olyan piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked.

(g) Minden piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked, 17-nél nagyobb prímszám.

1.16. : -) "Minden mohikán hazudik", mondta az utolsó mohikán. Igazat mondott?

1.17. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $2^n > n$.

1.18. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, amelyre $1{,}001^n > 1000$

1.19. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

1.20. Írjuk fel a -9 és a -25 számok számtani és mértani közepét! Melyik nagyobb? Mit mond ki a számtani és mértani közepekről szóló egyenlőtlenség? Magyarázzuk meg, miért nincs ellentmondás!

1.21. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a, b > 0$ esetén

1.22. $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

1.23. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

1.24. Határozzuk meg az $x^2(1-x)$ függvény legnagyobb értékét a $[0{,}1]$ zárt intervallumon.

1.25. Melyik az egységkörbe írható maximális területű téglalap?

2. Koordinátarendszerek

2.1. Adjuk meg a $P(-1;\sqrt{3})$ Descartes koordinátájú pont polárkoordinátáit.

2.2. Adjuk meg az $r = 18,\ \varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ polárkoordinátájú pont Descartes koordinátáit.

2.3. Adjuk meg az $r = 4,\ \varphi = \dfrac{\pi}{6},\ h = 10$ hengerkoordinátájú pont Descartes koordinátáit.

2.4. Adjuk meg az $r = 4,\ \vartheta = \dfrac{\pi}{6},\ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ gömbi koordinátájú pont Descartes koordinátáit.

2.5. Egy 4m sugarú gömb felszínének egyik pontja $P\left(4, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ gömbi koordinátákkal megadva. Legyen QP a gömb P ponton átmenő átmérője! Határozzuk meg a Q pont gömbi koordinátáit!

2.6. Milyen alakzatot határoznak meg a térben az $(x, y, 5)$ Descartes koordinátájú pontok?

2.7. Milyen alakzatot határoznak meg a térben az $(r; \dfrac{\pi}{3}; \varphi)$ gömbi koordinátájú pontok?

3. Sík és térvektorok

3.1. Számítsuk ki az adott vektorok hosszát! Írjuk fel az adott vektorokkal azonos irányba mutató egység hosszúságú vektorokat!

(a) $\mathbf{a} = (1, -1)$ **(b)** $\mathbf{b} = (-3{,}4)$ **(c)** $\mathbf{c} = (-10{,}5\sqrt{3})$ **(d)** $\mathbf{d} = (d_x, d_y)$

3.2. Végezzük el a kijelölt vektorműveleteket, ha $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (-2{,}1)$:

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, **(b)** $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, **(c)** $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$, **(d)** $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

3.3. Bizonyítsuk be, hogy két vektor skalárszorzata mindig kisebb vagy egyenlő, mint a két vektor hosszának a szorzata! Írjuk fel a megfelelő egyenlőtlenséget a vektorok koordinátáival! Hasonlítsuk össze az egyenlőtlenséget a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséggel!

3.4. Számítsuk ki az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ skalárszorzatot!

3.5. Mekkora szöget zár be egymással az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor?

(a) $\mathbf{u} = (10; 5\sqrt{3})$, $\mathbf{v} = (-10; 5\sqrt{3})$? **(b)** $\mathbf{u} = (a_x; a_y)$, $\mathbf{v} = (b_x; b_y)$

3.6. Legyen az ABC háromszögben a C-ből A-ba mutató vektor $\mathbf{a}$, a C-bõl B-be mutató vektor $\mathbf{b}$ és legyen $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan megszorozva önmagával, bizonyítsuk be a koszinusz-tételt!

3.7. $A(2; -3; 1)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ és $D(-5; -5; 3)$ négy pont a térben. Bizonyítsuk be, hogy $AC \perp \perp BD$!

3.8. Számoljuk ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ kifejezéseket, ha $\mathbf{a}\,(0; 1; -1)$, $\mathbf{b}\,(1; 1; 1)$, $\mathbf{c}\,(1; 2; 3)$.

3.9. Számoljuk ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ kifejezéseket, ha

(a) $\mathbf{a}\,(1; 2; 3)$, $\mathbf{b}\,(4; 5; 6)$, $\mathbf{c}\,(7; 8; 9)$ **(b)** $\mathbf{a}\,(-1; 3; 5)$, $\mathbf{b}\,(6; -2; 0)$, $\mathbf{c}\,(3; 5; -4)$

3.10. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

4. Koordinátageometria

4.1. Írjuk fel az egyenesek egyenleteit. P az egyenes egy pontja, $\mathbf{n}$ az egyenes normálvektora, $\mathbf{v}$ az egyenes irányvektora.

(a) $P(3;-2)$, $\mathbf{n}\,(6;-5)$ **(b)** $P(3;-2)$, $\mathbf{v}\,(4;-5)$

4.2. Írjuk fel annak a síkbeli egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x+3y=5$ egyenessel és átmegy a $\mathbf{r}_0(3{,}2)$ ponton.

4.3. Írjuk fel annak a síkbeli egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges a $2x+3y=5$ egyenesre és átmegy a $\mathbf{r}_0(3{,}2)$ ponton.

4.4. Írjuk fel a térbeli egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha az egyenes átmegy a $(-3;2;-1)$ ponton és párhuzamos a $P(1;2;3)$ és $Q(2;4;6)$ pontokat összekötő egyenessel.

4.5. Írjuk fel az egyenesek egyenletrendszerét!

(a) $P(1;2;-3)$, $\mathbf{v}\,(4;-5;6)$ **(b)** $P_1(1;-2;3)$, $P_2(-4;5;-6)$

4.6. Írjuk fel a sík egyenletét, ha adott egy P pontja és $\mathbf{n}$ normálvektora!

(a) $P(1;2;3)$, $\mathbf{n}\,(-4;5;6)$ **(b)** $P(1;-2;3)$, $\mathbf{n}\,(0;1;2)$ **(c)** $P(-4;5;6)$, $\mathbf{n}\,(1;2;-3)$

4.7. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy a $\mathbf{r}_0(1{,}2{,}3)$ ponton és merőleges az

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{2-z}{2}$$

egyenesre.

5. Lineáris egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

5.1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & 4z & = & 4 \end{array}$$

5.2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & 24z & = & 44 \end{array}$$

5.3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

5.4.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Számoljuk ki a következő determinánsokat!

5.5. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

5.6. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

5.7. $\begin{vmatrix} 1 & 879 & -879 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

5.8. Ellenőrizzük a determináns számolás szabályait, minden feladatban kiszámolva a kapott determinánst:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

(a) Az eredeti determináns.

(b) Tükrözzünk a főátlóra.

(c) A második sort szorozzuk 0-al.

(d) A harmadik sort szorozzuk 2-vel.

(e) Cseréljük fel az 1. és a 3. oszlopot.

(f) Adjuk hozzá a 2. oszlophoz az első oszlop 2-szeresét.

5.9. A determinánsok tulajdonságait felhasználva számoljuk ki okosan a következő determinánst!

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 10 & 8 \\ 3 & 16 & -12 \\ 25 & 124 & -99 \end{vmatrix}$$

5.10. Adott a térben három pont, $A(1,1,2)$, $B(1,0,1)$, $C(1,2,c)$. Hogyan kell megválasztani a c értéket, hogy a három pont egy egyenesbe essen?

5.11. Adott a térben négy pont, $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$ és $O(0,0,0)$. Igaz-e, hogy a négy pont egy síkban van?

6. Komplex számok

6.1. Határozzuk meg a következő komplex számok valós és képzetes részét! Rajzoljuk be a komplex számokat a komplex számsíkra! Számoljuk ki az abszolút értéküket!

(a) $z_1 = 3 + 4i$ **(b)** $z_2 = 2 - 3i$ **(c)** $z_3 = -4 + 5i$ **(d)** $z_4 = i$

(e) $z_5 = 5i$ **(f)** $z_6 = -3i$ **(g)** $z_7 = 7$ **(h)** $z_8 = -8$

6.2. Írjuk fel az előző komplex számok konjugáltját! Adjuk meg a konjugáltak valós és képzetes részét! Ábrázoljuk az eredeti számokat kékkel, a konjugáltakat pirossal ugyanabban a koordinátarendszerben! Számoljuk ki a konjugáltak abszolút értékét, és hasonlítsuk össze az eredeti számok abszolút értékével!

6.3. Adott a $z = 3 + 4i$ komplex szám. Számoljuk ki a következő kifejezéseket:

(a) $-3z$ **(b)** $\overline{z}$ **(c)** $z \cdot \overline{z}$ **(d)** $|z|$

(e) z^2 **(f)** $\dfrac{1}{z}$

6.4. Adott két komplex szám $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = 2 - i$. Számoljuk ki a következő kifejezéseket:

(a) $z_1 + z_2$ **(b)** $2z_1 - 3z_2$ **(c)** $z_1 \cdot \overline{z}_2$ **(d)** $\dfrac{z_1}{z_2}$

6.5. Legyen $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 5 + 7i$. Számítsuk ki a következő műveletek eredményeit algebrai alakban!

(a) $z_1 + z_2$ **(b)** $3z_1 - z_2$ **(c)** $\overline{z}_1 + z_2$ **(d)** $z_1 + \overline{z}_2$

(e) $|z_1|$ **(f)** $\dfrac{1}{z_1}$ **(g)** $z_1 z_2$ **(h)** $\dfrac{z_2}{z_1}$

6.6. Számoljuk ki a $z = 2 + 3i$ komplex szám mint síkvektor

(a) tükörképét az origóra; **(b)** tükörképét a valós tengelyre;

(c) háromszorosára nyújtott képét; **(d)** $-\dfrac{\pi}{6}$-tal való elforgatottját!

6.7. Hol vannak a komplex síkon azok a pontok, amelyekre igaz, hogy

(a) $\operatorname{Im} z > 0$ **(b)** $\operatorname{Re} z \geq 0$ **(c)** $-2 \leq \operatorname{Re} z < 1$

(d) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ **(e)** $|\operatorname{Re} z| > 1$ **(f)** $1 < |z - 1| < 2$

6.8. Rajzoljuk be a következő komplex számokat a komplex számsíkra! Adjuk meg komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ **(b)** $z_2 = 5 - 5i$ **(c)** $z_3 = -4\sqrt{3} + 4i$ **(d)** $z_4 = i$

(e) $z_5 = 5i$ **(f)** $z_6 = -3i$ **(g)** $z_7 = 7$ **(h)** $z_8 = -8$

6.9. Rajzoljuk be a következő komplex számokat a komplex számsíkra! Adjuk meg a komplex számok algebrai alakját! Adjuk meg a számok abszolút értékét!

(a) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(c) $z_3 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right)$ **(d)** $z_4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

(e) $z_5 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ **(f)** $z_6 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(g) $z_7 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$ **(h)** $z_8 = 4\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

6.10. Van-e olyan komplex szám, amelynek

(a) abszolút értéke -2

(b) abszolút értéke 0

(c) abszolút értéke 2

(d) trigonometrikus alakja $-3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(e) trigonometrikus alakja $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(f) trigonometrikus alakja $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$?

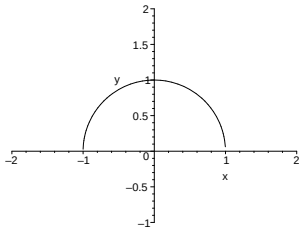
6.11. Adott két komplex szám, $u = 4(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ és $v = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Számítsuk ki a következő műveletek eredményeit.

(a) uv **(b)** $\frac{v}{u}$ **(c)** v^2 **(d)** $\sqrt{u}$

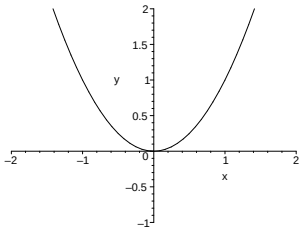
7. A függvény fogalma

7.1. Melyik görbe lehet valamelyik valós függvény grafikonja?

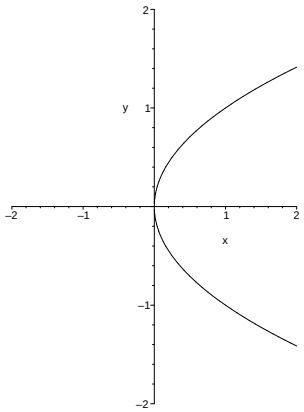
(a)



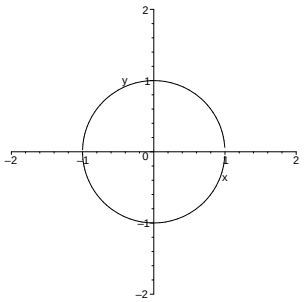
(b)



(c)



(d)



Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

7.2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$

7.3. $g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$

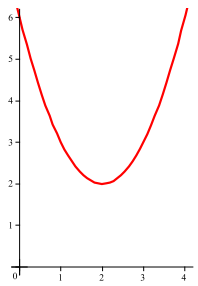
7.4. $F(x) = \begin{cases} 3-x & \text{ha } x \le 1 \\ 2x & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

7.5. $G(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x < 0 \\ x & \text{ha } 0 \le x \end{cases}$

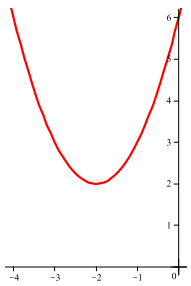
7.6. Párosítsuk a függvényeket és a függvénygrafikonokat!

(a) $(x-1)^2 - 4$ **(b)** $(x-2)^2 + 2$ **(c)** $(x+2)^2 + 2$ **(d)** $(x+3)^2 - 2$

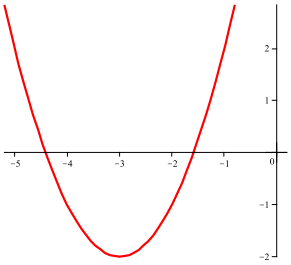
(A)



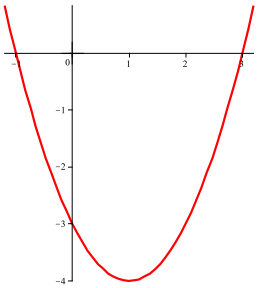
(B)



(C)

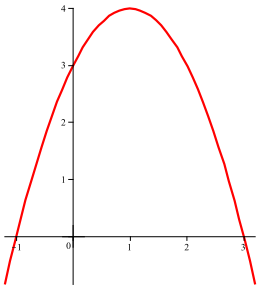


(D)

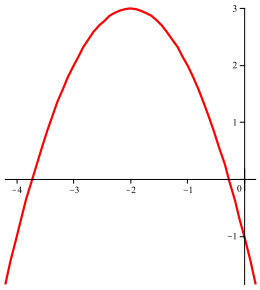


7.7. Az alábbi ábrákon az $y = -x^2$ függvény négy eltoltjának a grafikonját ábrázoltuk. Írjuk fel a grafikonoknak megfelelő képleteket!

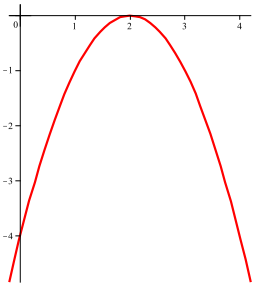
(a)



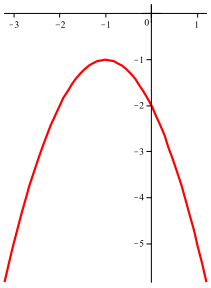
(b)



(c)



(d)



7.8. Határozzuk meg a függvényértékeket, ha $f(x) = x + 5$ és $g(x) = x^2 - 3$

(a) $f(g(0))$ **(b)** $g(f(0))$ **(c)** $f(g(x))$ **(d)** $g(f(x))$

(e) $f(f(-5))$ **(f)** $g(g(2))$ **(g)** $f(f(x))$ **(h)** $g(g(x))$

7.9. Határozzuk meg a függvényértékeket, ha $f(x) = x - 1$ és $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(a) $f(g(1/2))$ **(b)** $g(f(1/2))$ **(c)** $f(g(x))$ **(d)** $g(f(x))$

(e) $f(f(2))$ **(f)** $g(g(2))$ **(g)** $f(f(x))$ **(h)** $g(g(x))$

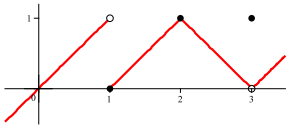
7.10. Vannak-e egyenlők a következő függvények között?

(a) $f_1(x) = x$ **(b)** $f_2(x) = \sqrt{x^2}$ **(c)** $f_3(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

(d) $f_4(x) = \ln e^x$ **(e)** $f_5(x) = e^{\ln x}$ **(f)** $f_6(x) = \left(\sqrt{|x|}\right)^2$

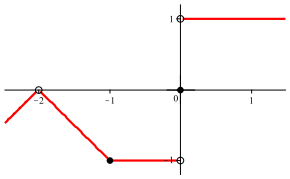
8. Határérték, folytonosság

8.1. Az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek, és ha igen, adjuk meg ezt az értéket!



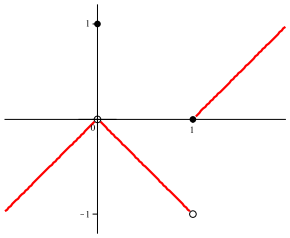
(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

8.2. Az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek, és ha igen, adjuk meg ezt az értéket!



(a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

8.3. Mely állítások igazak az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján?

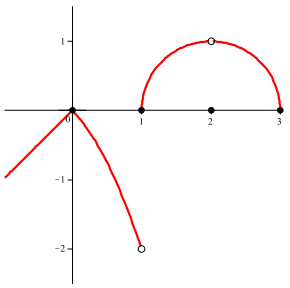


(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ létezik. **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

(f) Az $f(x)$ függvénynek a $(-1{,}1)$ nyílt intervallum minden pontjában van határértéke.

8.4. Mely állítások igazak az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján?



(a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nem létezik. **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nem létezik.

(d) Az $f(x)$ függvénynek a $(-1{,}1)$ nyílt intervallum minden pontjában van határértéke.

(e) Az $f(x)$ függvénynek a $(1{,}3)$ nyílt intervallum minden pontjában van határértéke.

Határozzuk meg az alábbi határértékeket behelyettesítéssel!

8.5. $\lim\limits_{x\to 3} 5x$ **8.6.** $\lim\limits_{x\to 0} 5x$ **8.7.** $\lim\limits_{x\to 1/7} (7x-3)$

8.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2}{7x-3}$ **8.9.** $\lim\limits_{x\to -1} 3x^2(7x-3)$ **8.10.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{7x-3}$

8.11. $\lim\limits_{x\to \pi/2} x\sin x$ **8.12.** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1-\pi}$

Határozzuk meg az alábbi határértékeket a törtek egyszerűsítése után!

8.13. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$ **8.14.** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$ **8.15.** $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

8.16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$ **8.17.** $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$ **8.18.** $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

8.19. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ **8.20.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$ **8.21.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

8.22. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$ **8.23.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **8.24.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

Határozzuk meg a következő trigonometrikus határértékeket!

8.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ **8.26.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **8.27.** $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \dfrac{\sin(\vartheta\sqrt{2})}{\vartheta\sqrt{2}}$

8.28. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin kt}{t}$ **8.29.** $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y}{4y}$ **8.30.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{\sin 3h}$

8.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ **8.32.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{\operatorname{tg} t}$

Határozzuk meg a következő függvények határértékeit a ∞-ben és a $-\infty$-ben!

8.33. $\dfrac{2x+3}{5x+7}$ **8.34.** $\dfrac{2x^2-7x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ **8.35.** $\dfrac{2x^3-7x}{x^3+1}$

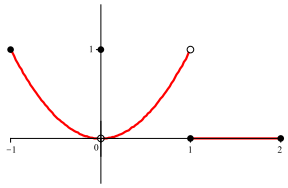
8.36. $\dfrac{2x+3}{5x^2+7}$ **8.37.** $\dfrac{2x^2-7x}{x^3+1}$ **8.38.** $\dfrac{x^{-1}+x^{-5}}{x^{-2}-x^{-3}}$

Határozzuk meg az alábbi függvények (véges illetve végtelen) határértékét a ∞-ben!

8.39. $\dfrac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$ **8.40.** $\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ **8.41.** $\dfrac{2x^3-7x}{x^2+1}$

8.42. $\dfrac{2x^2-7x+1}{\sqrt{x^3+3}+7}$ **8.43.** $\dfrac{2x^2-7x+1}{\sqrt{x^4+1}+1}$ **8.44.** $\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

8.45. Mely állítások igazak az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján?



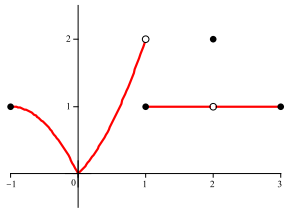
(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ létezik. **(f)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ **(i)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

(j) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$ **(k)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nem létezik. **(l)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

8.46. Mely állítások igazak az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján?



(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nem létezik. **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

(d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nem létezik.

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ **(i)** $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ nem létezik.

(j) Az $f(x)$ függvénynek a $(-1{,}1)$ nyílt intervallum minden pontjában van határértéke.

(k) Az $f(x)$ függvénynek a $(1{,}3)$ nyílt intervallum minden pontjában van határértéke.

Számítsuk ki a következő féloldali határértékeket! Mindegyik feladatnál számoljuk ki a másik oldali határértéket is!

8.47. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3x}$ **8.48.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5}{2x}$ **8.49.** $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2}$

8.50. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$ **8.51.** $\lim\limits_{x\to -8^+} \dfrac{2x}{x+8}$ **8.52.** $\lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{3x}{2x+10}$

8.53. $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{4}{(x-7)^2}$ **8.54.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x^2(x+1)}$

Számítsuk ki a következő határértékeket!

8.55. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ **8.56.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$ **8.57.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

8.58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Legyen k egy rögzített pozitív egész szám. Számítsuk ki a következő határértékeket:

8.59. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{e^x}$ **8.60.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[k]{x}}$

Milyen c szám megadása esetén lesznek a következő függvények folytonosak a 0-ban?

8.61. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{ha } x \geq 0 \\ mx+c & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ **8.62.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ c & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

8.63. $f(x) = \begin{cases} x^3+x+1 & \text{ha } x > 0 \\ ax^2+bx+c & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$ **8.64.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{ha } x \geq 0 \\ (x+c)^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

8.65. Adjunk példát olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényre, amely egy pont kivételével folytonos és

(a) nem korlátos. **(b)** korlátos, de nincs legnagyobb értéke.

8.66. Bizonyítsuk be, hogy minden harmadfokú polinomnak van gyöke.

Számoljuk ki a következő határértékeket:

8.67. $\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \ln x$ **8.68.** $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln x$

8.69. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ **8.70.** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

8.71. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos \operatorname{tg} x}{x \sin x}$ **8.72.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin \sin x}$

8.73. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\sin^2 x)}{x^2 \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x}$ **8.74.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$

8.75. Tegyük fel, hogy az f pozitív függvény folytonos $[a,b]$-ben. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [a,b]$, amelyre igaz, hogy

(a) $f(c) = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$

(b) $f(c) = \sqrt{f(a)f(b)}$

8.76. Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$-ben, továbbá $f(a) \geq a$ és $f(b) \leq b$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = c$.

8.77. Tegyük fel, hogy f és g folytonosak $[a, b]$-ben, továbbá $f(a) \geq g(a)$ és $f(b) \leq g(b)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = g(c)$.

8.78. Tegyük fel, hogy f és g folytonosak $[a, b]$-n, és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) < g(x)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c > 0$ szám, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) - f(x) \geq c$.

8.79. Adjunk példát olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényre, amely egy pont kivételével folytonos és

(a) nem korlátos.

(b) korlátos, de nincs legnagyobb értéke.

Van-e maximuma a következő függvényeknek a $[77, 888]$ intervallumon?

8.80. $3^{x+5} \sin x + \sqrt{x}$

8.81. $\sin(2x) + \cos(3x)$

8.82. $[x]$

8.83. $\{x\}$

Van-e olyan folytonos függvény, amelyikre igaz, hogy

8.84. $D(f) = [0,1]$ és $R(f) = (0,1)$

8.85. $D(f) = [0,1]$ és $R(f) = [3,4] \cup [5,6]$

9. Differenciálszámítás

Hol deriválható és mi a deriváltja a következő függvényeknek:

9.1. $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$ **9.2.** $f(x) = 4x^3\,\mathrm{tg}(x^2+1)$ **9.3.** $3x^8 - \dfrac{3}{4}x^6 + 2$

9.4. $x\sin x$ **9.5.** $(3x^5+1)\cos\,x$ **9.6.** $\dfrac{5x+3}{2x-1}$

9.7. x^x **9.8.** $x^{\mathrm{tg}\,x}$ **9.9.** $\sqrt[x]{x}$

9.10. Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ függvény érintőjének az egyenletét az $(1;6)$ pontban!

Keressük meg azokat a helyeket, ahol a $\sin x$ függvény érintője párhuzamos az

9.11. x tengellyel; **9.12.** a $y = x$ egyenessel.

Határozzuk meg a következő függvények inverzének a deriváltját a megadott helyeken!

9.13. $f(x) = x^5 + x^2, \quad a = 2$ **9.14.** $3x^3 + x, \quad a = 4$

9.15. $-2x^3 + \sqrt{x}, \quad a = -1$

9.16. A $\mathrm{tg}\,x$ függvény inverzét $\mathrm{arctg}\,x$ jelöli. Számoljuk ki az $\mathrm{arctg}\,x$ függvény derivált-függvényét!

9.17. Milyen szögben metszi az x^2 parabola az $y = 2x$ egyenest,azaz, mekkora a metszéspontban húzott érintő és az egyenes hajlásszöge?

9.18. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ görbék merőlegesen metszik egymást, azaz, a metszéspontokban az érintők merőlegesek.

Számoljuk ki a következő függvények második deriváltját:

9.19. $x^3 + 2x^2 + x + 1$ **9.20.** $e^{\sin x}$ **9.21.** $\ln\cos x$

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a következő határértékeket! Ellenőrizzük a szabály alkalmazásának a feltételeit!

9.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ **9.23.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$ **9.24.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin\sqrt{x}}$

9.25. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ **9.26.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\ln x}{x+1}$ **9.27.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{e^{-x}}$

9.28. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+1}$ határértéket!

Megoldás: A L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Mi a hiba?

9.29. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{2x+2}$ határértéket!

Megoldás: A L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{2x+2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Mi a hiba?

9.30. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$ határértéket!

Megoldás: A L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to \infty} \cos x.$$ Ez a határérték nem létezik.

Mi a hiba?

Határozzuk meg a következő határértékeket:

9.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$ **9.32.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$ **9.33.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$

9.34. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x^{-2}}$ **9.35.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$ **9.36.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{e^x}$

9.37. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **9.38.** $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x+1}$

Milyen intervallumokon növekszik, illetve csökken, hol van lokális szélsőértéke az $f(x)$ függvénynek, ha deriváltja

9.39. $f'(x) = (x-1)(x+2)$ **9.40.** $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$ **9.41.** $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

9.42. $f'(x) = (x^2-1)(x+2)$ **9.43.** $f'(x) = x^{1/3}(x+1)$ **9.44.** $f'(x) = x^{-1/2}(x-1)$

Milyen intervallumokon növekszik, illetve csökken, hol van lokális szélsőértéke a következő függvényeknek?

9.45. $f(x) = -x^2 - 3x + 23$ **9.46.** $f(x) = 2x^3 - 18x + 23$ **9.47.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 23$

9.48. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ **9.49.** $f(x) = x^2\sqrt{5 - x}$ **9.50.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 2}$

Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit és határozzuk meg a típusát!

9.51. $y = xe^{-x}$ **9.52.** $y = 2 + x - x^2$ **9.53.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

9.54. $y = x + \sin x$

Határozzuk meg következő függvények abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumokon!

9.55. $x^3 - 12x$ $[-10; 3]$, $[0; 3]$ **9.56.** $x^3 + 2x^5$ $[-1{,}4]$, $[2{,}5]$, $[-7{,}3]$

Ábrázoljuk a következő függvényeket, azaz keressük meg monoton szakaszait, szélsőértékeit és a határértékekeket az értelmezési tartomány szélein!

9.57. $y = 6 - 2x - x^2$ **9.58.** $y = x^3 - 3x + 3$ **9.59.** $y = x(6 - 2x)^2$

9.60. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$ **9.61.** $y = (x - 2)^3 + 1$ **9.62.** $y = 1 - (x + 1)^3$

9.63. A 16cm^2 területű téglalapok közül melyiknek a kerülete minimális? Mekkorák ennek az oldalai?

9.64. A 8 egység kerületű téglalapok közül miért a négyzetnek legnagyobb a területe?

9.65. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe írható téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb? Na és melyiknek a kerülete a legnagyobb?
Itt *beírt téglalapon* olyan téglalapot értünk, amelynek két szomszédos csúcsa az átfogón, a többi csúcsa a befogókon van.

9.66. Egy téglalap egyik oldala az x tengelyen fekszik, két felső csúcsa pedig az $y = 12 - x^2$ parabolán. Mikor maximális a területe egy ilyen téglalapnak?

9.67. 8 x 15 dm-es kartonlapból téglalap alakú, nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a kartonlap sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk ki, majd felhajtjuk az oldalakat. Milyenek legyenek a doboz méretei, ha azt szeretnénk elérni, hogy a lehető legnagyobb legyen a térfogata? Mekkora lesz a maximális térfogat?

9.68. Hozzunk létre egy háromszöget a koordináta-rendszer első síknegyedében úgy, hogy az x-, illetve y-tengely $(a,0)$, $(0, b)$ koordinátájú pontjait egy 20 egység hosszú egyenes szakasszal összekötjük. Mutassuk meg, hogy a közbezárt háromszög területe akkor lesz a legnagyobb , ha $a = b$.

9.69. Egy farmon az állatok számára el kell keríteni egy téglalap alakú karámot. A területet egyik oldalról folyó határolja, a másik három oldalon egyszálas vezetéket kell kifeszíteni, amelybe aztán áramot vezetnek. A rendelkezésre álló 800 méternyi vezetékkel mekkora területet lehet elkeríteni, és milyen méretű lesz a maximális területű karám?

9.70. Egy borsóültetvény 216 m^2-es téglalap alakú részét be kell keríteni, majd a kerítés egyik oldalával párhuzamosan két egyenlő részre kell osztani. Mekkorák legyenek a külső téglalap oldalai, hogy a lehető legkevesebb kerítésfonatot kelljen felhasználni? Milyen hosszú kerítésre van szükség?

9.71. Az amerikai posta belföldi forgalomban csak olyan küldeményeket vesz fel, amelyek hosszának és körméretének (a keresztmetszet kerületének) összege nem haladja meg a 108 inch-et (1 inch = 2,54 cm). Milyen méretű négyzetes hasábbal lehet elérni a legnagyobb térfogatot?

9.72. Határozzuk meg egy adott V térfogatú egyenes körhenger alapkörének R sugarát és m magasságát úgy, hogy a henger felszíne minimális legyen!

9.73. Határozzuk meg egy adott a alkotójú egyenes körkúp alapkörének R sugarát és m magasságát úgy, hogy a kúp térfogata maximális legyen!

9.74. Egy függőlegesen mozgó test magasságát az

$$s = -4{,}9t2 + 30t + 34$$

függvény adja meg, ahol s-t méterben, t-t másodpercben mérjük. Mekkora lesz

(a) a test sebessége a $t = 0$ időpontban;

(b) a legnagyobb magassága és mikor éri azt el;

(c) a sebessége, amikor $s = 0$?

9.75. Janka a parttól 2 kilométerre egy csónakban ül, és szeretne eljutni a tőle légvonalban 6 kilométerre lévő partmenti faluba. 2 km/h sebességgel tud evezni és 5 km/h sebességgel gyalogolni. Hol szálljon ki a csónakból, hogy a lehető legrövidebb idő alatt érjen a faluba?

9.76. Keressük meg, mekkora gyógyszermennyiségre a legérzékenyebb a test oly módon, hogy meghatározzuk azt az M értéket, amelynél a dR/dM deriváltnak maximum a van, ahol M a vérbe felszívódó anyag mennyisége, C egy pozitív állandó és R a reakció,

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

9.77. Két részecske helyzetét az s-tengelyen az $s_1 = cost$ és $s_2 = cos(t + \pi/4)$ függvények írják le.

(a) Mekkora a részecskék legnagyobb távolsága?

(b) Mikor ütköznek össze?

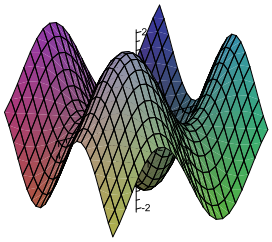
10. Többváltozós függvények

10.1. Keressük meg a következő kétváltozós függvények grafikonjait az ábrák között!

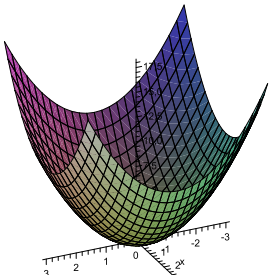
(a) $x^2 + y^2$ **(b)** $(x+y)^2$ **(c)** $x^2 - y^2$

(d) xy **(e)** $\sin x + \sin y$ **(f)** $\sin x \sin y$

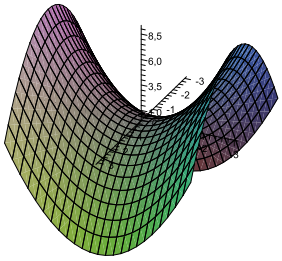
(A)



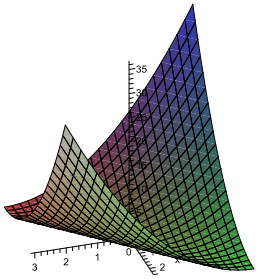
(B)



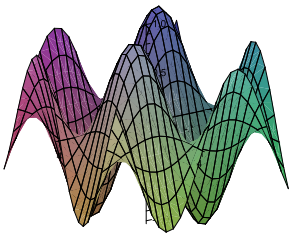
(C)



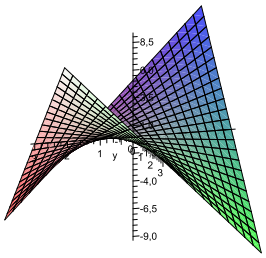
(D)



(E)

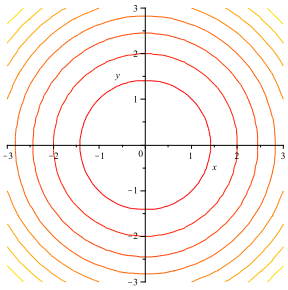


(F)

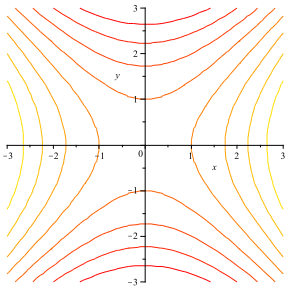


10.2. Az előző függvényeknek kirajzoltuk a térbeli a szintvonalait is. Keressük meg a rajzokhoz tartozó képleteket!

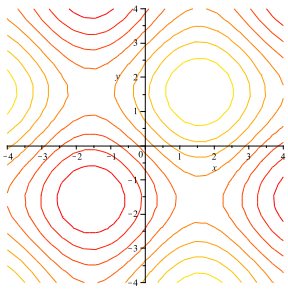
(A)



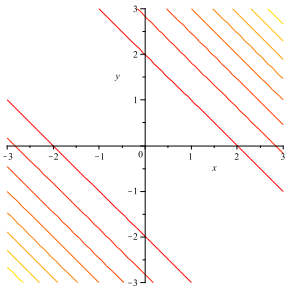
(B)



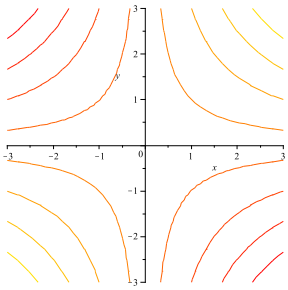
(C)



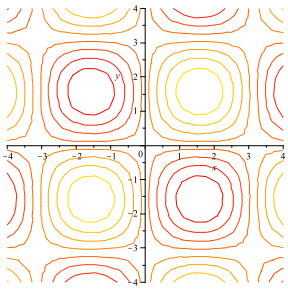
(D)



(E)



(F)



Szemléltessük a következő kétváltozós függvényeket szintvonalakkal és a térbeli grafikonokkal!

10.3. $f(x,y) = x^2 + y^2$ **10.4.** $f(x,y) = (x+y)^2$ **10.5.** $f(x,y) = x^2$

Számoljuk ki a következő függvények elsőrendű parciális deriváltjait:

10.6. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

10.7. $f(x,y) = e^{x-y}$

10.8. $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^3 + z^4)$

10.9. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1-y}$

10.10. $f(x,y) = x^y + y^x$

10.11. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját a P_0 pontban az adott irányban:

10.12. $z = \dfrac{1}{xy}$ $P_0(1,-1)$ $y + 3x - 1 = 0$ egyenes irányában.

10.13. $u = 3x^2 + 2y^2 - z$ $P_0(1,2,5)$ $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ irányában.

Számítsuk ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait:

10.14. $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

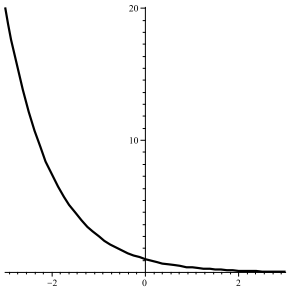
10.15. $u = x\sin(y + 2z)$

11. Primitív függvény, határozatlan integrál

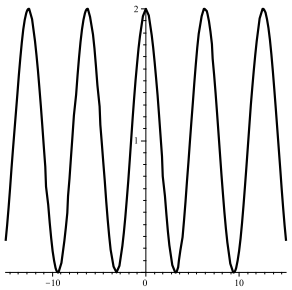
11.1. A következő függvényeket a baloldali oszlopban, deriváltjaikat a jobboldali oszlopban ábrázoltuk. Keressük meg őket!

(a) $x^3 - 4x$ **(b)** x^3 **(c)** $x + \sin x$ **(d)** $\operatorname{tg} x$ **(e)** e^{-x}

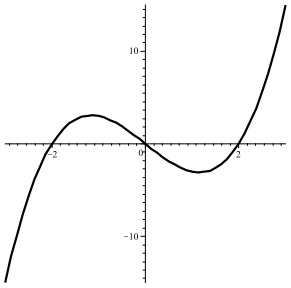
(1)



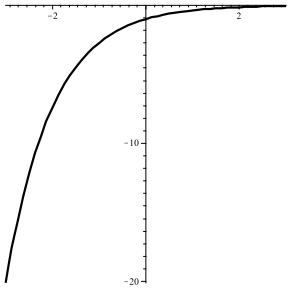
(A)



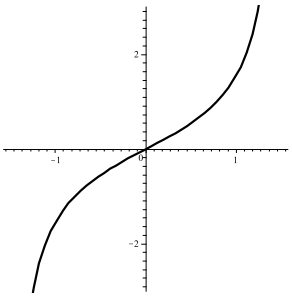
(2)



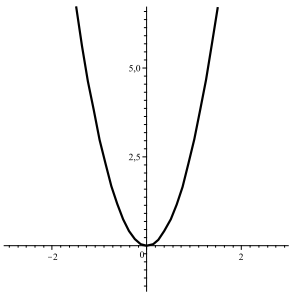
(B)



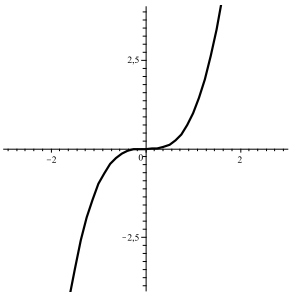
(3)



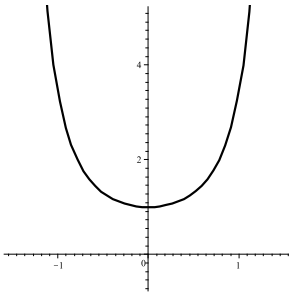
(C)



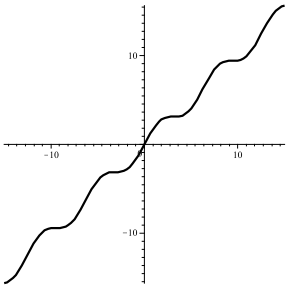
(4)



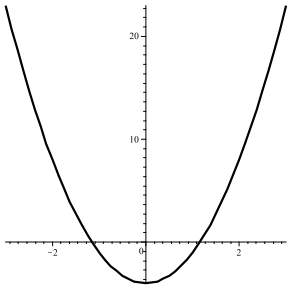
(D)



(5)



(E)



Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

11.2. $\int \sin(x+3)\,dx$ **11.3.** $\int (1+x+5x^2)\,dx$ **11.4.** $\int \sqrt{x+2}\,dx$

11.5. $\int (\sin x+\cos x)^2\,dx$ **11.6.** $\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx$ **11.7.** $\int e^{2x+3}\,dx$

Határozzuk meg parciális integrálással a következő határozatlan integrálokat!

11.8. $\int x\cos x\,dx$ **11.9.** $\int x^2e^{-x}\,dx$ **11.10.** $\int x^2\sin x\,dx$

11.11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **11.12.** $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$ **11.13.** $\int e^x\sin x\,dx$

Határozzuk meg a következő, $\int \frac{f'}{f}$ vagy $\int f^a f'$ alakú határozatlan integrálokat!

11.14. $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ **11.15.** $\int (\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$ **11.16.** $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

11.17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **11.18.** $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ **11.19.** $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\,dx$

Számoljuk ki a következő határozatlan integrálokat helyettesítésekkel!

11.20. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ **11.21.** $\int xe^{x^2}\,dx$ **11.22.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11.23. $\int (2x+1)e^{x^2+x+1}\,dx$ **11.24.** $\int \cos x\,e^{\sin x}\,dx$ **11.25.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Számoljuk ki a következő határozatlan integrálokat!

11.26. $\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}\,dx$ **11.27.** $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ **11.28.** $\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$

11.29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx$

11.30. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\,dx$

11.31. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\,dx$

11.32. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx$

11.33. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,dx$

11.34. $\displaystyle\int x \sin(x^2 + 1)\,dx$

11.35. $\displaystyle\int \operatorname{tg}\, x\,dx$

11.36. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,dx$

11.37. $\displaystyle\int \ln x\,dx$

11.38. $\displaystyle\int \ln(x^2 + 1)\,dx$

11.39. $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} \mathrm{x}}\,dx$

11.40. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx$

12. Határozott integrál

Számítsuk ki a következő határozott integrálokat, ha léteznek!

12.1. $\displaystyle\int_2^3 x^2\,dx$

12.2. $\displaystyle\int_4^6 4^{5x+6}\,dx$

12.3. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$

12.4. $\displaystyle\int_3^4 x\ln x\,dx$

12.5. $\displaystyle\int_{-2\pi}^0 \sin^2 x\,dx$

12.6. $\displaystyle\int_{-4}^2 \frac{2x^2+6x+2}{3x-1}\,dx$

12.7. $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{1}{(x-5)^2}\,dx$

12.8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+5x^2}$

12.9. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

12.10. $\displaystyle\int_1^2 \ln\sqrt{x}\,dx$

12.11. $\displaystyle\int_{10}^{20} \ln(x^2+1)\,dx$

12.12. $\displaystyle\int_{10}^{20} x^2\ln(x^2-1)\,dx$

Határozzuk meg a következő határozott integrálokat helyettesítéssel!

12.13. $\displaystyle\int_2^5 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

12.14. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

12.15. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3^x+2}{3^x+3^{2x}}\,dx$

12.16. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\operatorname{tg}\,x}\,dx$

13. A határozott integrál alkalmazásai

Határozzuk meg

13.1. az $f(x) = -x^2 + 3$ függvény grafikonja alatti területet;

13.2. az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = -x + 2$ függvények grafikonjai által bezárt területet;

13.3. az $f(x) = -x^2 + 2x$ és a $g(x) = -x$ függvények grafikonjai által bezárt területet!

Forgassuk meg a következő függvények grafikonjait az x tengely körül a megadott intervallumokban! Számítsuk ki a keletkezett forgástestek térfogatát!

13.4. e^{-x} $[0,1]$ **13.5.** $\sqrt{x}$ $[0,1]$ **13.6.** $\sin x$ $[0,\pi]$

Számítsuk ki a következő függvénygrafikonok ívhosszát a megadott intervallumokon!

13.7. $y = \sqrt{x^3}$ $[0,1]$ **13.8.** $y = \log(\cos x)$ $[0, \frac{\pi}{4}]$ **13.9.** $y = \operatorname{ch} x$ $[0,1]$

Számítsuk ki a következő improprius integrálokat:

13.10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ **13.11.** $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ **13.12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Konvergensek-e a következő improprius integrálok:

13.13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **13.14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ **13.15.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

13.16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx$ **13.17.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} \, dx$ **13.18.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$

II. rész

Második félévi feladatok

14. Többváltozós függvények integrálása

Határozzuk meg a következő területi integrálokat a megadott téglalapokon:

14.1. $\iint\limits_T (x+y)\,dx\,dy \qquad T:\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$

14.2. $\iint\limits_T xy\,dx\,dy \qquad T:\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$

14.3. $\iint\limits_T e^{x+y}\,dx\,dy \qquad T:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

14.4. $\iint\limits_T x\sin y\,dx\,dy \qquad T:\ 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3$

Határozzuk meg a következő területi integrálokat a megadott halmazokon:

14.5. $\iint\limits_T (x+y)\,dx\,dy \qquad T:\ x^2+y^2 \le 1$

14.6. $\iint\limits_T xy\,dx\,dy \qquad T:\ (x-1)^2+(y+1)^2 \le 4$

14.7. $\iint\limits_T (x-xy)\,dx\,dy \qquad T:\ (x-2)^2+(y+3)^2 \le 4$

14.8. $\iint\limits_T xy\,dx\,dy \qquad T: \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \sin x \end{cases}$

14.9. $\iint\limits_T (x+y)\,dx\,dy \qquad T: \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le y \le \cos x \end{cases}$

Legyen $T = [0,1] \times [0,2] \times [0,3] \subset \mathbb{R}^3$. Számoljuk ki a következő térfogati integrálokat a T téglán:

14.10. $\iiint\limits_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

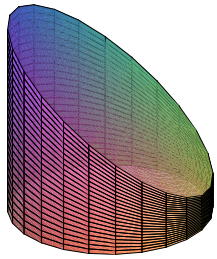
14.11. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$

14.12. $\iiint\limits_T e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$

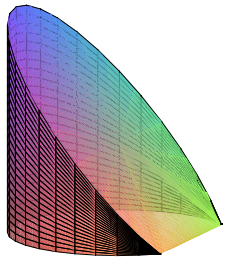
14.13. $\iiint\limits_T (xz+y^2)\,dx\,dy\,dz$

14.14. Számoljuk ki az $y = x^2,\ y = 2x^2$ parabolák és az $x = 1$ egyenes által határolt síkidom területét.

14.15. Számoljuk ki a az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást és az $x + y + z = 2$, $z = 0$ síkok által határolt test térfogatát.A keresett test:



14.16. Számoljuk ki a az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást és az $x + y + z = 1$, $z = 0$ síkok által határolt test térfogatát.A keresett test:



14.17. Számoljuk ki az R sugarú gömb térfogatát.

14.18. Egy vékony lemezt az $y = 0, x = 1$ és az $y = 2x$ egyenesek határolnak. A lemez sűrűsége $\rho(x, y) = 6x + 6y + 6$. Határozzuk meg a test tömegét és tömegközéppontjának koordinátáit!

14.19. Egy test az első térnyolcadban van, a koordinátasíkok és az $x + y + z = 2$ sík határolja, a sűrűsége pedig $\rho(x, y, z) = 2x$. Határozzuk meg a test tömegét és tömegközéppontjának koordinátáit!

14.20. Egy 1 méter mély gödörből a felszínre szivattyúzzuk a vizet. Mennyi munkát végzünk a gravitáció ellenében ha a gödör

(a) kocka alakú,

(b) félgömb alakú?

15. Számsorozatok konvergenciája

15.1. Legyen $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Számoljuk ki az A halmaz infimumát.

15.2. Lássuk be, hogy $\frac{1}{n} \to 0$.

Konvergensek-e a következő sorozatok? Tartanak-e valamelyik végtelenbe?

15.3. $(-1)^n$ **15.4.** n **15.5.** $(-1)^n \frac{1}{n}$ **15.6.** $(-1)^n n$

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

15.7. $\frac{1}{n^2}$ **15.8.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$ **15.9.** $\frac{n+1}{n^3-2n+1}$ **15.10.** $\frac{n^3+1}{n^3-2n+1}$

15.11. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **15.12.** $\sqrt{n^2+n} - n$ **15.13.** $\frac{n^3+1}{\sqrt{n^4+1}}$ **15.14.** $\sqrt[n]{2^n+n+1}$

15.15. Igaz-e, hogy

(a) két divergens sorozat összege divergens?

(b) egy konvergens és egy divergens sorozat összege divergens?

(c) két divergens sorozat szorzata divergens?

(d) egy konvergens és egy divergens sorozat szorzata divergens?

15.16. Igaz-e, hogy

(a) ha egy korlátos sorozat konvergens, akkor monoton?

(b) ha egy korlátos sorozat monoton, akkor konvergens?

(c) ha egy sorozat végtelenbe tart, akkor monoton?

(d) ha egy sorozat monoton növő, akkor vagy konvergens vagy végtelenbe tart?

15.17. Legyen $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Melyik állítás igaz?

(a) Megadható olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén $|a_n - 1| < 0{,}001$.

(b) Megadható olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén $|a_n - 2| < 0{,}001$.

(c) Az a_n sorozat tart 1-hez.

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

15.18. $\dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$

15.19. $n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$

15.20. $a_n = \dfrac{1+n+n^2}{1+\sqrt{n^4+1}}$

15.21. $\dfrac{n^3-n^2+1}{\sqrt{n^3+1}+100n+1}$

15.22. $\dfrac{n^2+(-1)^n}{3n^2+1}$

15.23. $a_n = \sqrt[n]{n^2+n+1}$

15.24. $\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

15.25. $\sqrt[n]{2^n+n^2+1}$

15.26. Bizonyítsuk be, hogy a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos!

16. Numerikus sorok

Számítsuk ki a következő sorok összegét!

16.1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$

16.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+5^n}{9^n}$

16.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$

16.4. Jelöljük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor k-adik részletösszegét s_k-val. Igaz-e, hogy ha

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 0 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $\implies a_n \to 0$?

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $\implies s_k \to 0$?

(e) $a_n \to 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

(f) $s_k \to 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens $\implies a_n \to 1$?

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens $\implies s_k \to 1$?

16.5. Legyen $0 < q < 1$ tetszőleges. Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$ sor?

Konvergensek-e a következő sorok?

16.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

16.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

16.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+2}$

16.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

16.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

16.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

16.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

16.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

16.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

16.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

16.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$

16.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+7}{\sqrt{n^6+1}+2011}$

16.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

16.19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

16.20. Lássuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ végtelen sor konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens ha $\alpha \le 1$.

17. Hatványsorok, Taylor sor

17.1. Írjuk fel a $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény harmadik Taylor-polinomját a 0-ban.

17.2. A fonálinga mozgását leíró törvényben a $\sin x$ függvényt az x függvénnyel közelítik. Mekkora lesz legfeljebb az elkövetett hiba, ha a kitérés szöge legfeljebb $5° < 0{,}1$ radián?

17.3. Hány tagot vegyünk figyelembe $\sin x$ Taylor-sorából, ha azt akarjuk, hogy $x < 0{,}1$ esetén a hiba legfeljebb 10^{-6} legyen?

17.4. Hány tagot vegyünk figyelembe $\sin x$ Taylor-sorából, ha azt akarjuk, hogy $x < 1 < \frac{\pi}{3} (= 60°)$ esetén a hiba legfeljebb 10^{-3} legyen?

Számoljuk ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát:

17.5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

17.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

17.7. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

17.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

17.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

17.10. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

17.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Fejtsük hatványsorba 0 körül a következő függvényeket:

17.12. $\frac{1}{1-x}$

17.13. $\ln(1+x)$

17.14. $\operatorname{arctg} x$

17.15. $\frac{1}{1+x}$

17.16. $\frac{x}{1+x}$

17.17. $\frac{x}{(1-x)^2}$

17.18. $\frac{1}{2+x}$

17.19. $\sin^2 x$

17.20. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát és összegét:

17.21. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

17.22. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

17.23. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$

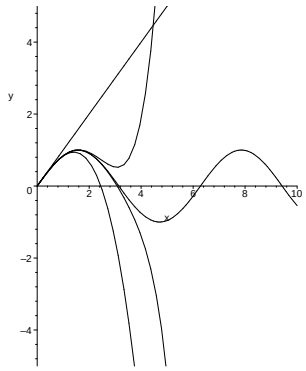
17.24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

17.25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

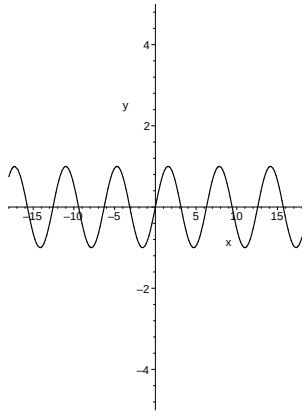
17.26. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

17.27. A következő ábrákon a $\sin x$ függvény néhány Taylor-polinomját láthatjuk.

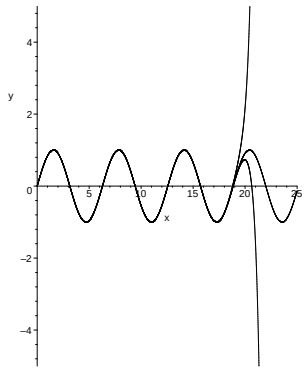
1., 3., 5. és 7. Taylor polinom:



51. Taylor-polinom:



51. és 57. Taylor-polinom:



17.28. Fejtsük hatványsorba az $f(x) = x^2 + x + 1$ függvényt

(a) 0-körül; **(b)** 1-körül.

17.29. Fejtsük hatványsorba az $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ függvényt

(a) 0-körül; **(b)** 1-körül.

18. Fourier-sorok

18.1. Állítsuk elő az alábbi függvények Fourier-sorát!

(a) $\sin^2 x$ **(b)** $\cos^2 x$

Fejtsük Fourier sorba a a $(-\pi, \pi)$ intervallumon az alábbi függvényeket:

18.2. $f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad -\pi < x < \pi$

18.3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{ha } -\pi < x < 0 \end{cases}$

18.4. $f(x) = |\operatorname{sgn} x| \qquad -\pi < x < \pi$

A fenti három függvény megegyezik a $(0, \pi)$ intervallumon!

18.5. $f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$

18.6. $f(x) = |x| \qquad -\pi < x < \pi$

Az előző két függvény megegyezik a $(0, \pi)$ intervallumon!

18.7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } 0 < x < \pi \\ -x^2 & \text{ha } -\pi < x < 0 \end{cases}$

18.8. Legyen most $f(x)$ az a 2π szerint periodikus függvény, amelyikre $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, ha $x \in (0,2\pi)$ és $f(0) = 0$. Ezt a függvényt *fűrészfog-függvénynek* is nevezik.

(a) Fejtsük Fourier-sorba az $f(x)$ függvényt a $(0,2\pi)$ nyílt intervallumon.

(b) Számoljuk ki a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ numerikus sor összegét.

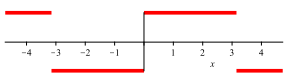
18.9. Legyen f az a periodikus függvény, amelyre $f(x) = x^2$ ha $x \in [-\pi, \pi]$.

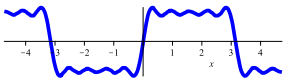
(a) Fejtsük Fourier-sorba az $f(x)$ függvényt a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

(b) Számoljuk ki a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor összegét.

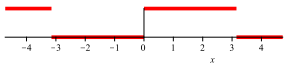
18.10. Kirajzoltuk néhány előző feladat függvényeit és a 10-edik (egynél az 5-ödik) Fourier közelítéseit. Melyek ezek a függvények?

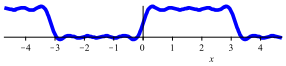
(a)


−4 −3 −2 −1 1 2 3 4
x

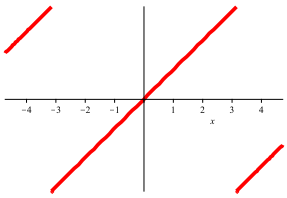

−4 −3 −2 −1 1 2 3 4
x

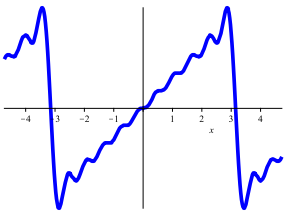
(b)


−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x

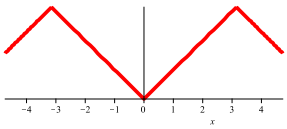

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x

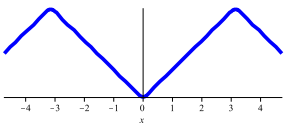
(c)


−4 −3 −2 −1 1 2 3 4
x

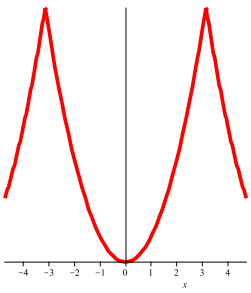

−4 −3 −2 −1 1 2 3 4
x

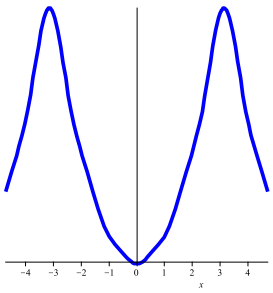
(d)


−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x

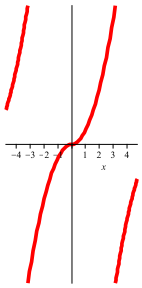

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x

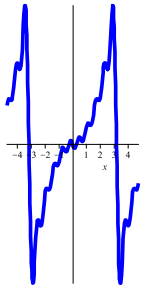
(e)


−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x


−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
x

(f)





19. Lineáris vektorterek

19.1. Számoljuk ki az $A+B,\ A-B,\ 2A+3B$ mátrixokat, ahol

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\4&0&2&1\\2&-5&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-4&1&2\\1&5&0&3\\2&-2&3&-1\end{pmatrix}$$

19.2. Számoljuk ki az $AB-BA$ mátrixot, ha

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&-1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

19.3. Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&3&1\\5&0&-6&2\end{pmatrix}$$

(a) Melyik mátrix szorzás végezhető el az alábbiak közül?

$AB,\ BA,\ A^TB,\ B^TA$

(b) Számoljuk ki a $C=AB$ szorzatot.

Számoljuk ki a következő determinánsok értékét:

19.4. $D=\begin{vmatrix}2&1&-1&2\\1&1&3&-1\\2&0&1&-1\\-1&-2&3&-3\end{vmatrix}$

19.5. $D=\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{vmatrix}$

19.6. $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

19.7. $D=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\9&16&25&36\\16&25&36&49\end{vmatrix}$

Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét:

19.8. $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&2\\2&-1&4\end{pmatrix}$

19.9. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$

19.10. $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

19.11. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

Keressük meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

19.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

19.13. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19.14. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

20. Differenciálegyenletek

Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú (szeparálható) differenciálegyenleteket:

20.1. $(1-x^2)y' + (1-y^2) = 0$

20.2. $y' = e^{y-x}$

20.3. $xy' + y^2 = 1$

20.4. $x + yy' = xy(y - xy')$

20.5. $y + (x + xy)y' = 0$

20.6. $y^2(1+x) + x^2(1-y)y' = 0$

20.7. A kemencéből kivett kenyér hőmérséklete 20 perc alatt 100 °C-ról 60 °C-ra csökken. A levegő hőmérséklete 25 °C. A hűtés kezdetétől számítva mennyi idő alatt csökken a kenyér hőmérséklete 30 °C-ra?

20.8. Egy V térfogatú tartályban víz van. A tartály alján levő nyíláson keresztül v liter/perc sebességgel folyik ki a tartályban levő folyadék, miközben a tartály feletti csapból v liter/perc sebességgel p töménységű sóoldat folyik a tartályba, ahol $(0 < p < 1)$, és ott azonnal el is keveredik. Határozzuk meg a tartályban levő sóoldat q töménységét az idő függvényében.

20.9. Adott egy oldat, mely etil-acetátot és nátrium-hidroxidot tartalmaz. A két anyag között az alábbi egyensúlyra vezető reakció megy végbe:

$$CH_3 - COO - CH_2CH_3 + NaOH \rightleftharpoons CH_3COONa + CH_3CH_2OH,$$

a reakciótermékek: nátrium-acetát és etil-alkohol. A kiindulási anyagok kezdeti koncentrációja: c_a(etil-acetát) $= 0.01 mol/dm^3$, c_b(nátrium-hidroxid) $= 0{,}002 mol/dm^3$. Az etil-acetát koncentrációja 23 perc alatt 10 %-kal csökken. A kémiai egyenletből látható, hogy a reakcióban az anyagok 1:1 arányban vesznek részt. Ha $m(t)$ jelöli a t időpontig a reakcióban résztvevő etil-acetát illetve nátrium- hidroxid anyagmennyiségét, K pedig a reakció egyensúlyi-állandója, akkor a folyamatot a

$$\frac{dm}{dt} = K(a-m)(b-m)$$

differenciálegyenlet írja le. Mennyi idő alatt csökken a koncentráció 15 %-kal?

20.10. Egy 300 literes tartály alját só és (valamilyen) nem oldódó anyag keverékével fedik be. Tegyük fel, hogy a só oldódási sebessége arányos az adott pillanatbeli koncentráció és a telített oldat (3 kg vízben l kg só) koncentrációjának különbségével, és hogy a tiszta víz adott mennyisége 1/3 kg sót l perc alatt old fel. Számítsuk ki, mennyi sót tartalmaz az oldat l óra múlva.

20.11. Az ember 1 perc alatt átlag 18-szor lélegzik. Mindannyiszor 2000 cm^3 levegőt lehel ki, amely 4% CO_2-t tartalmaz. Hány százalék széndioxidot tartalmaz fél óra elteltével az a 400 m^3 térfogatú előadóterem, amelyben 50 személy tartózkodik, ha a szellőzőberendezések l perc alatt 40 m^3 friss levegőt szállítanak. (A friss levegő $0{,}04\%$ $C0_2$-t tartalmaz).

20.12. Egy 10000 m^3 befogadóképességű tanterembe a szellőzőberendezések 1 perc alatt 1000 m^3 friss levegőt szállítanak, amely 0,04% CO_2-t tartalmaz. Reggel 9 órakor bejönnek a helyiségbe a diákok és 30 perc alatt a levegő CO_2 tartalma 0,12%-ra emelkedik. Hány százalék CO_2 várható a levegőben du. 2 órára?

Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket:

20.13. $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 + x$

20.14. $y' - xy = x^3$

20.15. $y' + y = e^{-x}$

20.16. $y' + 2xy = 0$

20.17. $y' - 2y \operatorname{ctg} x = 0$

20.18. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$

20.19. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$

20.20. Melyek azok a görbék, amelyeknél az érintési pont felezi az érintőnek a koordináta-tengelyek közti darabját?

20.21. Melyek azok a görbék, amelyekre minden (x, y) pontjában húzott érintő átmegy a $(2x,0)$ ponton?

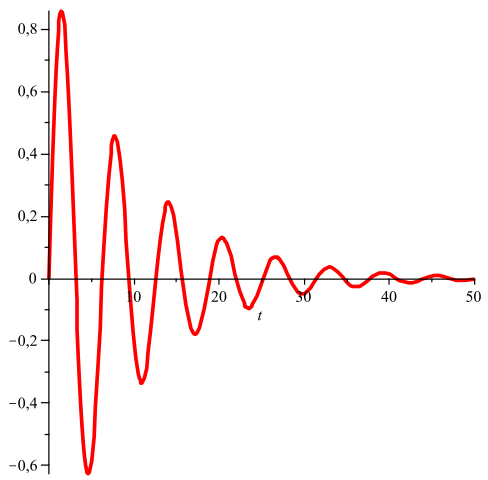
20.22. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre a következő állítás igaz: a görbe tetszőleges $P(x, y)$ pontjának az origótól mért távolsága ugyanakkora, mint az a szakasz, amit a P pontban a görbéhez húzott érintő az y tengelyből lemetsz.

20.23. A rezgőmozgást végző m tömegű testre egy, a sebességgel arányos fékező erő hat *(csillapított rezgőmozgás)*. Ilyen csillapítást végez például az autó kerekén a lengéscsillapító. Ekkor a mozgás differenciálegyenlete ($k > 0$ a rugóállandó, $c > 0$ a csillapítási tényező):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Keressük meg az egyenlet megoldásait és vizsgáljuk meg a megoldások menetét.

Felrajzoltunk egy megoldást gyenge csillapítás esetén:

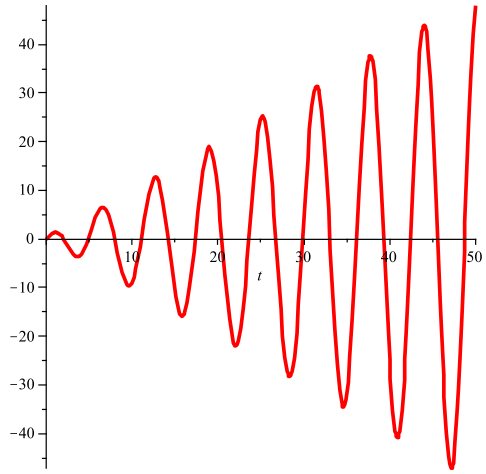


20.24. Most az m tömegű testre a rugóerőn kívül egy harmonikus kényszererő is hat *(kényszerrezgés)*. Ilyen mozgást és az ezzel fellépő rezonanciát tud okozni például a szél egy hídon. A kényszererő nagyságát egy $M\sin(\omega_k t)$ alakú függvény írja le, így a (csillapítatlan) kényszerrezgés differenciálegyenlete:

$$m\ddot{x} + kx = M\sin(\omega_k t).$$

Keressük meg az egyenlet megoldásait és vizsgáljuk meg a megoldások menetét.

Felrajzoltunk egy megoldást amikor a sajátfrekvencia és a kényszerfrekvencia megegyezik:



Oldjuk meg a következő állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket:

20.25. $y'' + y = 0$

20.26. $y'' - 5y' + 6y = 0$

20.27. $y'' - y' - 6y = x^2$

20.28. $4y'' + 4y' + 37y = \sin x$

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletrendszereket:

20.29.
$$\begin{aligned} \dot{x} - y - z &= 0 \\ \dot{y} - 5x - y + z &= 0 \\ \dot{z} - y - z &= 0 \end{aligned}$$

20.30.
$$\begin{aligned} \dot{x} - y - z &= 2 \\ \dot{y} - x - z &= 2 \\ \dot{z} - x - y &= 2 \end{aligned}$$

20.31. Valamely A anyag felbomlik két anyagra: P-re és Q-ra. Az egyes anyagok keletkezésének sebessége arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. Legyen x és y a P, illetve a Q anyagnak a t időpontig keletkezett mennyisége. Határozzuk meg ezeknek a változási szabályát, ha tudjuk, hogy a kezdeti pillanatban $x = 0,\ y = 0$, 1 órával később pedig $x = \frac{3}{8}a,\ y = \frac{1}{8}a$, ahol a az A anyag kezdeti mennyisége.

21. Többváltozós leképezések

Számoljuk ki a következő térgörbék érintőinek egyenletét a megadott helyeken:

21.1. $(t-3)\mathbf{i} + (t^2+1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
$t = 2$

21.2. $\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{\cos t}\,\mathbf{k}$
$P_0(0,1,1)$

Határozzuk meg az alábbi síkgörbék ívhosszát:

21.3. $y = \sqrt{x}$
$0 \le x \le a$

21.4. (ciklois)
$x = r(t - \sin t)$
$y = r(1 - \cos t)$
$0 \le t \le 2\pi$

21.5. (arkhimédeszi spirális)
$r = a\varphi$
$0 \le \varphi \le 2\pi$

Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkjait az adott helyeken:

21.6. $\mathbf{r} = (u^2 - v)\mathbf{i} + (u - v^3)\mathbf{j} - (u+v)\mathbf{k}; \quad u = 1;\ v = 2$

21.7. $z = x^2 + y^2; \quad x = 1;\ y = 2$

Számoljuk ki az alábbi felületdarabok felszínét:

21.8. $\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}; \quad 0 \le u \le 1;\ 0 \le v \le \pi$

21.9. $z = \dfrac{x^2}{2y}; \quad 0 \le x \le 1; 1 \le y \le 2$

Számoljuk ki a következő skalármezők gradiensét, itt a egy rögzített állandó vektort jelöl:

21.10. $u(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\ \mathbf{r}$

21.11. $u(\mathbf{r}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|$

21.12. $u(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 + \dfrac{1}{\mathbf{r}^2}$

Számoljuk ki a következő vektormezők divergenciáját és rotációját:

21.13. $xy\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$

21.14. $\dfrac{x}{y}\mathbf{i} + \dfrac{y}{z}\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$

21.15. $x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

Számoljuk ki a következő vektormezők divergenciáját és rotációját, itt a egy rögzített állandó vektort jelöl:

21.16. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$

21.17. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\ \mathbf{r})\,\mathbf{r}$

21.18. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|\,\mathbf{a}$

22. Vonalintegrál

Határozzuk meg az alábbi vonalintegrálokat:

22.1. $\displaystyle\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy \qquad C:\ y = x^2 \quad (-1 \le x \le 1)$

22.2. $\displaystyle\oint_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy \qquad C:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

22.3. $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz \qquad C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$

22.4. Határozzuk meg az alábbi vonalintegrált és ellenőrizzük, hogy a keresztbe vett deriváltak megegyeznek ("rot $\mathbf{v} = 0$"):

$$\oint_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad C:\ x^2 + y^2 = R^2$$

Határozzuk meg a $z(x, y)$ primitív függvényt:

22.5. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$

22.6. $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

22.7. $dz = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x + y)^3}$

Határozzuk meg az $u(x, y, z)$ primitív függvényt:

22.8. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$

22.9. $du = (1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z})\,dx + (\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2})\,dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz$

22.10. $du = \dfrac{(x + y - z)\,dx + (x + y - z)\,dy + (x + y + z)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$

Megoldások

Szándékosan üres oldal.

1. Egyenlőtlenségek

1.18. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget az $x = 0{,}001$ szereposztás mellett.

$$1{,}001^n = (1 + 0{,}001)^n > 1 + 0{,}001 \cdot n > 0{,}001 \cdot n > 1000$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 1000 \cdot 1000 = 1000000$.

1.19. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget az $x = \dfrac{1}{n}$ szereposztás mellett.

1.21. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget n darab $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ és az 1 számokra:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Mindkét oldalt $n + 1$-edik hatványra emelve kapjuk a kívánt eredményt.

1.24. Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$x^2(1-x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (1-x) \le 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (1-x)}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $\dfrac{x}{2} = 1 - x$ azaz $x = \dfrac{2}{3}$.

Tehát a keresett maximum: $\dfrac{4}{27}$

1.25. Az ábra jelöléseit használva, a téglalap területe:

$T = 4F$, ahol $F = x \cdot y$ és $x^2 + y^2 = 1$.

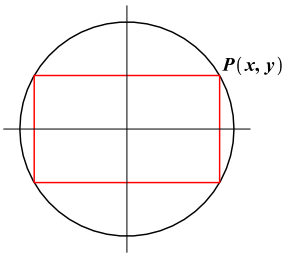
Ezért $F = x\sqrt{1 - x^2}$. Számoljuk ki F^2 maximumát:

$$F^2 = x^2(1 - x^2) \le \left(\frac{x^2 + (1 - x^2)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $x^2 = 1 - x^2$ azaz

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát a maximális területe a négyzetnek van: $T = 2$



2. Koordinátarendszerek

2.1. A P pont helyvektorának hossza $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. A helyvektor φ szögének tangense: $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ezért $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{6}\pi$ vagy $\varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}$. Mivel a pont y-koordinátája, $\sqrt{3} > 0$, ezért $\varphi = \dfrac{5}{6}\pi$. Tehát a polárkoordináták:

$$r = 2,\ \varphi = \frac{5}{6}\pi.$$

2.2. $$x = r \cdot \cos\varphi = 18 \cdot \cos\frac{4\pi}{3} = -18 \cdot \frac{1}{2} = -9;$$

$$y = r \cdot \sin\varphi = 18 \cdot \sin\frac{4\pi}{3} = -18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -9\sqrt{3}.$$

A pont Descartes koordinátái: $P(-9, -9\sqrt{3})$.

2.3. $$x = r \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$y = r \cdot \sin\varphi = 4 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 4\frac{1}{2} = 2;$$

$$z = h = 10.$$

A pont Descartes koordinátái: $P(2\sqrt{3}, 2, 10)$.

2.4. $$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi = 4 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3};$$

$$z = r \cdot \cos\vartheta = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

A pont Descartes koordinátái: $P(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

2.6. Az xy síkkal párhuzamos, a z tengelyt a $z = 5$-ben metsző sík.

2.7. A z tengely körüli, origó csúcspontú $2 \cdot \frac{\pi}{3}$ nyílásszögű egyenes körkúp palástja.

3. Sík és térvektorok

3.2. (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 - 2, -2 + 1) = (1; -1)$,

(b) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2), 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1) = (0, -1)$,

(c) $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -8$,

(d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = (3^2 + (-2)^2) - ((-2)^2 + 1^2) = 8$.

3.7. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = (-6,4,0)$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BD} = (-6, -9,3)$. Be kell látnunk, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-6) \cdot (-6) + 4 \cdot (-9) + 0 \cdot 3 = 0.$$

3.8. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, -1, -1)$, $\quad \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = -3$, $\quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (-1, -7,5)$

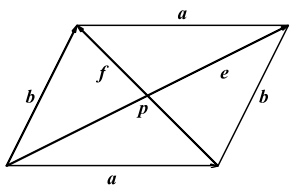
3.10. Az ábra jelöléseit használjuk. Az $\mathbf{f}$ átló felező pontjának helyvektora

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{e} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Az $\mathbf{e}$ átló felezőpontjának helyvektora

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$$

Eszerint a két átló felezőpontjai megegyeznek, így ez a közös pont szükségképpen a két átló metszéspontja, amit az ábrán $\mathbf{p}$ jelöl.



4. Koordinátageometria

4.2. A keresett egyenes normálisa megegyezik az adott egyenes normálisával $\mathbf{n}\,(2{,}3)$-al. Tehát az egyenlete $\mathbf{n}\,\mathbf{r} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0$, azaz

$$2x + 3y = 12 \text{ vagy } 2x + 3y - 12 = 0.$$

4.3. A $2x + 3y = 5$ egyenes egy normálisa a $\mathbf{v}\,(2{,}3)$ vektor. Mivel a keresett egyenes merőleges az adott egyenesre, ezért $\mathbf{v}$ egy irányvektora. De így az egyenes normálisa a $\mathbf{n}\,(-3{,}2)$ vektor. Tehát az egyenlete $\mathbf{n}\,\mathbf{r} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0$, azaz

$$-3x + 2y = -5 \text{ vagy } -3x + 2y + 5 = 0.$$

4.4. A keresett egyenes egy irányvektora a P pontból a Q pontba mutató vektor, $\mathbf{v}\,(1{,}2{,}3)$. Ezért paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= -3 + t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= -1 + 3t. \end{aligned}$$

4.7. Az egyenes (egyik) irányvektora az $\mathbf{n}\,(2{,}3,-2)$ vektor. Ez a vektor egyben a keresett sík normálisa. Ezért az egyenlete:

$$2x + 3y - 2z = 2 \text{ vagy } 2x + 3y - 2z - 2 = 0.$$

5. Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Vonjuk ki az első egyenlet kétszeresét a másodikból és az első egyenlet háromszorosát a harmadikból, azaz az első egyenlet segítségével ejtsük ki az x változót a másik kettőből:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & - & 3z & = & -5 \\ & & -7y & + & z & = & -5 \end{array}$$

Adjuk hozzá a harmadik egyenlethez a második egyenlet hétszeresét:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & - & 3z & = & -5 \\ & & & & -20z & = & -40 \end{array}$$

A harmadik egyenletből kapjuk, hogy $z = 2$. Ezt behelyettesítve az első két egyenletbe és átrendezve:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

A második egyenlet szerint $y = 2$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe és átrendezve:

$$x = 0$$

Tehát az egyenletrendszer (egyetlen) megoldása:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 2$$

5.2. Vonjuk ki az első egyenlet kétszeresét a másodikból és az első egyenlet háromszorosát a harmadikból, azaz az első egyenlet segítségével ejtsük ki az x változót a másik kettőből:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & - & 3z & = & -5 \\ & & -7y & + & 21z & = & 35 \end{array}$$

Adjuk hozzá a harmadik egyenlethez a második egyenlet hétszeresét:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & - & 3z & = & -5 \\ & & & & 0\cdot z & = & 0 \end{array}$$

Eszerint a z változó értéke tetszőleges lehet. A második egyenlet szerint:

$$y = 3z - 5$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$$x = 4z - 2.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$x = 4z - 2,\ y = z - 5,\ z \in \mathbb{R}$$

5.5. Szeretnénk elérni, hogy a determináns második oszlopa az első sorba kerüljön, hiszen így két nulla lesz az első sorban. Tükrözzük a determinánst a főátlóra, azaz cseréljük meg a determináns sorait az oszlopaival:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Cseréljük meg a determináns első két sorát:

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolását most már könnyen elvégezhetjük:

$$D = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2(4\cdot 4 - 1\cdot 6) = -20$$

5.10. Tekintsük a $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}\,(0,-1,2-c)$ és $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}\,(0,-2,1-c)$ vektorokat. A három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2-c \\ 0 & -2 & 1-c \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & (2-c) \\ -2 & (1-c) \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 0 & (2-c) \\ 0 & (1-c) \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (3-c)\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Innen kapjuk, hogy $c = 3$.

5.11. Tekintsük az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}\,(1,1,0)$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}\,(1,0,1)$ és $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}\,(0,1,11)$ vektorokat. A négy pont pontosan akkor van egy síkban, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzata nulla.

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$$

Tehát nincs olyan sík, amelyik mind a négy pontot tartalmazza.

6. Komplex számok

6.3. (a) $-3z = -3(3+4i) = -9 - 12i$

(b) $\overline{z} = \overline{(3+4i)} = 3 - 4i$

$z \cdot \overline{z} = (3+4i) \cdot (3-4i) = 9 + 16 = 25$

$z^2 = (3+4i)(3+4i) = -7 + 24i$

(d) $|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{25} = 5$

(e) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{3-4i}{25} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

6.4. (a) $z_1 + z_2 = (1+i) + (2-i) = 3 - i$

$z_1 \cdot \overline{z}_2 = (1+i)(2+i) = 1 + 3i$

(b) $2z_1 - 3z_2 = 2(1+i) - 3(2-i) = -4 + 5i$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{1+3i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

6.11. (a) $uv = 12(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12})$

(b) $\dfrac{v}{u} = \dfrac{3}{4}(\cos(-\dfrac{13\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{13\pi}{12}) = \dfrac{3}{4}(\cos\dfrac{13\pi}{12} - i\sin\dfrac{13\pi}{12})$

(c) $v^2 = 9(\cos\dfrac{2\pi}{4} + i\sin\dfrac{2\pi}{4}) = 9(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = 9i$

(d) $u_1 = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3}$

$u_2 = 2(\cos(\dfrac{2\pi}{3} + \pi) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3} + \pi) = 2(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3} = -u_1$

7. A függvény fogalma

7.1. A (c) és (d) ábrán szereplő görbék nem valamely függvény grafikonjai mert van olyan függőleges egyenes, amelyik a görbét több mint egy pontban (két pontban) metszi. Az (a) és (b) ábrák viszont függvénygrafikont ábrázolnak. Az ábrákon szereplő görbék:

(a) $y = \sqrt{1-x^2}$ (felső félkör). (b) $y = x^2$ (c) $x = y^2$ (d) $x^2 + y^2 = 1$

7.10. Két függvény pontosan akkor egyezik meg, ha megegyezik az értelmezési tartományuk és itt minden pontban azonos értékeket vesznek fel. Ezért a fenti függvények közül $x = \ln e^x$ és $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{|x|}\right)^2 = |x|$, azaz $f_1 \equiv f_4$ és $f_2 \equiv f_6$. Más egyenlőség nem teljesül! Jegyezzük meg azonban, hogy pozitív x esetén mind a hat függvény azonos értéket vesz fel.

8. Határérték, folytonosság

8.23. Bővítsük a törtet $\sqrt{x} + 1$-el (a számláló "gyöktelenítése").

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{1}{2}$$

8.24. A $t = 1 + x^2$ helyettesítést elvégezve és az előző feladat eredményét felhasználva:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \frac{1}{2}$$

8.25. Mivel a $\sin x$ páratlan függvény, ezért elég a "jobboldali" határértéket kiszámolni. Ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, akkor $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$

Osszuk el az egyenlőtlenségeket a pozitív $\sin x$-el: $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

Mivel a szereplő kifejezések mind pozitívak, vehetjük az egyenlőtlenségek reciprokát:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, mert a $\cos x$ függvény folytonos a 0-ban. Ezért alkalmazható a rendőrszabály:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

8.26. Bővítsük a törtet $1 + \cos x$-el:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{2}$$

8.34. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, x-el. Ezzel megszüntetjük a határérték "kritikusságát", a $\frac{\infty}{\infty}$ esetet.

$$\frac{2x^2-7x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{2x-7+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} \to \infty$$

A $infty$-ben ugyanezt a határértéket kapjuk, mert a számláló és a nevező is páros fokú polinom.

8.59. Legyen $a = \sqrt[k]{e} > 1$.

$$\frac{x^k}{e^x} = \left(\frac{x}{a^x}\right)^k \to 0.$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy az exponenciális függvény minden polinomnál gyorsabban tart a végtelenbe.

8.60. Vezessük be a $t = \ln x$ helyettesítést. Ekkor

$\sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{e^t} = \left(\sqrt[k]{e}\right)^t = a^t$, és ezért

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{a^t} = 0$$

Eszerint tehát a logaritmus-függvény minden gyökös kifejezésnél lassabban tart a végtelenbe.

8.61. Az f függvény pontosan akkor folytonos a 0, ha balról is és jobbról is folytonos. Az f "balról", azaz $x \le 0$ esetén megegyezik az x^2+2 függvénnyel, amelyik mindenütt, tehát 0-ban is folytonos.

Az f függvény $x > 0$ esetén megegyezik az $mx + c$ függvénnyel, amelynek "jobboldali" határértéke 0-ban c. Ezért tehát a az f függvény pontosan akkor folytonos 0-ban, ha

$$2 = f(0) = c$$

8.62. Az $f(x)$ függvény pontosan akkor folytonos a 0-ban, ha itt van határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ és } f(0) = c.$$

Így tehát a $c = 1$ esetben lesz a függvény folytonos a 0-ban.

9. Differenciálszámítás

9.1. Alkalmazzuk a hányados deriválási szabályát:

$$f'(x) = \frac{(\sin x - x\cos x)'(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)(\cos x + x\sin x)'}{(\cos x + x\sin x)^2}.$$

Kiszámítjuk a számlálóban szereplő deriváltakat az összeg és a szorzat deriválási szabályait felhasználva:

$$(\sin x - x\cos x)' = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$$

$$(\cos x + x\sin x)' = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x$$

Ezeket behelyettesítve:

$$f'(x) = \frac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

9.2. $f'(x) = 12x^2\operatorname{tg}(x^2+1) + 4x^3(\operatorname{tg}(x^2+1))'$

A láncszabály szerint $(\operatorname{tg}(x^2+1))' = \dfrac{1}{\cos^2(x^2+1)} \cdot 2x = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$

Így tehát $f'(x) = 12x^2\operatorname{tg}(x^2+1) + \dfrac{8x^4}{\cos^2(x^2+1)}$

9.10. Ellenőrizzük, hogy az adott pont rajta van-e a görbén! Ehhez az kell, hogy a függvény értéke az 1 helyen éppen 6 legyen: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 4 = 6$.

Az érintőegyenes egyenlete $y = m(x - x_0) + y_0$, ahol most $x_0 = 1,\ y_0 = 6$ és $m = f'(1)$.

A függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. Innen $m = f'(1) = 2$. Tehát az érintő egyenlete az adott pontban:

$y = 2(x-1) + 6$, vagy másképp felírva $y = 2x + 4$.

9.13. Első lépésként keressük meg azt az c helyet, ahol a függvény értéke $a = 2$, azaz az inverz függvény értékét a $a = 2$ helyen. Ezt próbálgatással kaphatjuk: $c = 1$. Az inverz függvény deriváltjáról szóló képlet szerint

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}.$$

A függvény deriváltja $f'(x) = 5x^4 + 2x$ és így $f'(1) = 7$. Tehát

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{7}$$

Megjegyzés: Meg kell azt is vizsgálni, hogy van-e inverze az adott függvénynek. A deriváltfüggvény vizsgálatából kiderül, hogy az egész számegyenesen nem invertálható $f(x)$, hiszen $\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$-ben lokális szigorú maximuma, 0-ban minimuma van, ezért nem szigorúan monoton. Viszont az 1-et tartalmazó $(0,\infty)$ félegyenesen $f(x)$ szigorúan monoton növő, ezért itt invertálható.

9.16. Mivel $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{tg} x$ függvény inverze, ezért

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}.$$

Mivel $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, ezért

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

9.51. $y' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}$.

Keressük meg a derivált gyökeit. A $(1-x)e^{-x} = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x = 1$, ezért a függvénynek csak a $c = 1$-ben lehet lokális szélsőértéke.
Mivel $y'(x) > 0$ ha $x < 1$ és $y'(x) < 0$, ha $x > 1$, ezért a függvénynek *lokális szigorú maximuma* van és itt az érték e^{-1}. A függvény további vizsgálatából az is kiderül, hogy ez egyben abszolút maximuma is a függvénynek.

9.55. Legyen $f(x) = x^3 - 12x$. Az $f(x)$ függvénynek ott lehet abszolút szélsőértéke (maximuma vagy minimuma) ahol a derivált nulla, vagy pedig a zárt intervallum végpontjaiban. Keressük meg a derivált gyökeit:

$$f'(x) = (x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12 = 0$$

A két gyök:

$$x_1 = -2 \text{ és } x_2 = 2.$$

A $[-10; 3]$ intervallum esetén:

$$f(-10) = -880, \quad f(-2) = 16, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = -9$$

Így tehát a $[-10; 3]$ intervallumon az $f(x) = x^3 - 12x$ függvény abszolút minimuma -880 az $x = -10$ pontban, abszolút maximuma pedig 16 az $x = -2$ pontban.

A $[0; 3]$ intervallum esetén:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = -9.$$

(Mivel a -2 nem esik bele a vizsgált intervallumba, ezért az itt felvett függvényértéket nem vesszük számításba!)

Így tehát a $[0; 3]$ intervallumon az $f(x) = x^3 - 12x$ függvény abszolút minimuma -16 az $x = 2$ pontban, abszolút maximuma pedig 0 az $x = 0$ pontban.

9.72. A henger felszíne és térfogata

$$F = 2\pi R^2 + 2\pi m R, \quad V = mR^2\pi.$$

A térfogat képletéből fejezzük ki m-et és helyettesítsük be a felszín képletébe:

$$m = \frac{V}{\pi R^2}, \quad F(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Mivel az $F(R)$ függvény a $(0, \infty)$ nyílt félegyenesen van értelmezve, itt végig pozitív, 0-hoz közeli (kicsi) illetve ∞-hez közeli (nagy) R-ek esetén $F(R)$ értéke "nagy", ezért a keresett abszolút minimum egyben lokális minimum is. Keressük meg tehát az $F(R)$ függvény deriváltjának a gyökeit:

$$F'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0, \text{ azaz } 2\pi R = \frac{V}{R^2}, \; R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Tehát az adott V térfogatú egyenes körhenger felszíne akkor minimális, ha

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Számoljuk ki az ehhez a sugárhoz tartozó magasságot, illetve a magasság és az átmérő arányát:

$$m = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}, \quad \frac{m}{2R} = 1.$$

Tehát annak a hengernek a felszíne minimális, amelynek az átmérője megegyezik a magassággal!

Megjegyzés:

Annak belátása, hogy az $F(R)$ függvénynek van abszolút minimuma még hátra van, az erről szóló fenti "okoskodás" semmiképp sem tekinthető bizonyításnak. Lássunk tehát egy korrekt bizonyítást:

Legyen $F_0 = F(1) = 2\pi + 2V$. Mivel $\lim\limits_{R\to+0} F(R) = \lim\limits_{R\to\infty} F(R) = \infty$, ezért megadható egy $0 < a < 1$ és egy $1 < b$ úgy, hogy $R \in (0, a]$ illetve $R \in [b, \infty)$ esetén $F(R) > F_0$. A Weierstrass-tétel szerint az $F(R)$ függvénynek van minimuma az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az a és b megválasztása miatt ez a minimum az egész $(0, \infty)$ félegyenesen is minimum, és mivel ez a minimum-hely nem lehet az $[a, b]$ intervallum egyik végpontja sem, ezért ez egyben lokális minimum is. Itt tehát a derivált nulla. Ilyen hely azonban az egész félegyenesen csak egy van, tehát ez a keresett minimumhoz tartozó sugár.

10. Többváltozós függvények

10.1. (a) — (B), (b) — (D), (c) — (C), (d) — (F), (e) — (A), (f) — (E)

11. Primitív függvény, határozatlan integrál

11.2. $\displaystyle\int \sin(x+3)\,dx = -\cos(x+3) + C$

11.8. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

12. Határozott integrál

12.1. $\displaystyle\int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{3} = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

13. A határozott integrál alkalmazásai

13.1. A keresett síkidomot az $f(x) = -x^2 + 3$ parabola és az x tengelynek az $f(x)$ gyökei közötti szakasza határolja. Keressük meg először az $f(x)$ gyökeit:

$$-x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$$

A keresett trület:

$$T = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{x=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$$

14. Többváltozós függvények integrálása

14.1. $\displaystyle\iint_T (x+y)\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{1} dy =$

$\displaystyle= \int_1^3 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{3} = 5$

14.3. $$\iint\limits_T e^{x+y}\,dxdy = \left(\int\limits_0^1 e^x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 e^y\,dy\right) = \left(\int\limits_0^1 e^x\,dx\right)^2 = \left([e^x]_0^1\right)^2 = (e-1)^2$$

14.6. Alkalmazzuk a körlapokra vonatkozó transzformációs képletet:

$$\iint\limits_T xy\,dxdy = \int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{2\pi} r(r\cos\varphi+1)(r\sin\varphi-1)d\varphi\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^3\sin(2\varphi)}{2}+r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)-r\right)d\varphi\right)dr =$$

$$= \left(\int\limits_0^2 \frac{r^3}{2}\,dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}\sin(2\varphi)\,d\varphi\right)+\left(\int\limits_0^2 r^2\,dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi\right)-$$

$$-\left(\int\limits_0^2 r\,dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}1\,d\varphi\right) =$$

$$= -\left(\int\limits_0^2 r\,dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}1\,d\varphi\right) = -4\pi$$

Felhasználtuk, hogy a $\sin(2\varphi)$ és a $(\sin\varphi-\cos\varphi)$ függvények primitív függvényei 2π szerint periodikusak, ezért megváltozásuk a $[0,2\pi]$ intervallumon 0.

15. Számsorozatok konvergenciája

15.1. Belátjuk, hogy $\inf A = 0$. Nyilvánvaló, hogy a 0 alsó korlátja A-nak, hiszen A minden eleme pozitív. Be kell látni, hogy 0 a legnagyobb also korlát, azaz ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges pozitív szám, akkor ε nem alsó korlátja az A halmaznak. Ehhez minden $\varepsilon > 0$-hoz meg kell adnunk az A halmaz egy $a \in A$ elemét úgy, hogy $a < \varepsilon$.

Legyen tehát $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk az n és m természetes számokat:

$$n = m = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1.$$

n és m választása miatt $n = m > \dfrac{2}{\varepsilon}$ és így

$$a = \frac{1}{n}+\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

és persze $a \in A$

15.2. Be kell látni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található megfelelő n_0 küszöbindex. Legyen tehát $\varepsilon > 0$ tetszőleges pozitív szám.

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Ekkor $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, és így $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. De akkor $n \geq n_0$ esetén $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mivel $\dfrac{1}{n} > 0$, ezért

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

tehát n_0 tényleg jó küszöbindex.

15.20. A sorozat számlálója is és nevezője is ∞-hez tart. Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is a nevező "nagyságrendjével", n^2-el:

$$a_n = \frac{1+n+n^2}{1+\sqrt{n^4+1}} = \frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}+1}{\dfrac{1}{n^2}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}$$

Itt az "új" számláló és nevező 1-hez tart a konvergens sorozatok műveleti szabályai szerint. Ezért

$$a_n \to 1.$$

15.23.

$$1 \le \sqrt[n]{n^2+n+1} \le \sqrt[n]{3\cdot n^2} = \sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2.$$

A nevezetes sorozatok határértékeiről szóló állítás szerint $\sqrt[n]{3} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$. A műveleti szabályok szerint az egyenlőtlenség jobb oldala 1-hez tart. Ezért alkalmazható a rendőr szabály, és így

$$a_n \to 1.$$

15.26. 1) Monotonitás: Alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget az

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számokra (összesen $n+1$ darab számra).

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1+n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emelve

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2) Felső korlát: Alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget az

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számokra (összesen $n+2$ darab számra).

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1/2+1/2+n(1+1/n)}{n+2} = 1$$

Mindkét oldalt $n+2$-edik hatványra emelve

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1^{n+2} = 1 \text{ és így } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 4.$$

16. Numerikus sorok

16.3. Legyen $a = \dfrac{2}{5}$ és $b = \dfrac{3}{5}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}a^n + \sum_{n=0}^{\infty}b^n.$$

Mivel $0 < a, b < 1$, a jobboldalon két konvergens geometriai sor összege szerepel, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b} = \frac{5}{3}+\frac{5}{2}.$$

16.5. Alkalmazzuk a gyök kritériumot az $a_n = n^2 q^n$ tagokból álló numerikus sorra:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot q \to q < 1.$$

Így tehát a fenti sor konvergens.

16.14. Alkalmazzuk a hányados kritériumot az $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ tagokból álló numerikus sorra:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} = (n+1) \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Mivel $\dfrac{1}{e} < 1$, ezért a sor konvergens.

Megjegyzés: Amennyiben a gyökkritériumot szeretnénk alkalmazni, a $b_n = \sqrt{a_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat határértékét kéne kiszámítani. Megmutatható, hogy ez is $\dfrac{1}{e}$, de ez jóval nehezebb, mint az előző megoldás.

16.17. A fenti sorban a nevező "nagyságrendje" n^3, a számláló "nagyságrendje" pedig n^2. Alkalmazzuk a nagyságrendi kritériumot az

$$a_n = \frac{n^2+3n+7}{\sqrt{n^6+1}+2011} \text{ és } b_n = \frac{1}{n}$$

szereposztás mellett.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2+3n+7)\cdot n}{\sqrt{n^6+1}+2011}.$$

Osszuk el az így felírt tört számlálóját és nevezőjét n^3-el:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}+\frac{2011}{n^3}}, \text{ mivel } \frac{\sqrt{n^6+1}}{n^3} = \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}.$$

A fenti tört számlálója és nevezője is 1-hez tart, ezért $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ezért a nagyságrendi kritérium szerint a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+7}{\sqrt{n^6+1}+2011}$ sor divergens.

16.20. Ezt az integrál kritérium segítségével könnyen beláthatjuk, hiszen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

17. Hatványsorok, Taylor sor

17.1. $f'(x) = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$f''(x) = (tgx)'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f'''(x) = (tgx)''' = \left(2\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2\frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x} = 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

Tehát $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2$. Tehát a 3-adik Taylor-polinom

$$t_3(x) = x + \frac{x^3}{3}.$$

Mivel $\operatorname{tg} x$ páratlan függvény, ezért a negyedik deriváltja a 0-ban 0. Tehát a fenti polinom egyben a negyedik Taylor-polinom is, $t_3(x) = t_4(x)$.

17.5. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1.$ Így tehát $R = 1$.

17.6. $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \dfrac{1}{4}.$ Ezért $R = 4$.

17.20. Bővítsük a függvényt $1-x$-el:

$$f(x) = \frac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)} = \frac{1-x}{1-x^3}$$

Felhasználva a geometriai sort, x helyébe x^3-öt írva

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}, \text{ ha } |x| < 1.$$

Ezért

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} - x\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

ahol

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 3n \\ -1 & \text{ha } k = 3n+1 \\ 0 & \text{ha } k = 3n+2 \end{cases}$$

17.21. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n+1)}} \to 1$, tehát $R = 1$.

Legyen $g(x) = x \cdot f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Tagonkénti deriválással $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Újabb deriválással $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Ezért $g'(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x), \quad g(x) = -\int \ln(1-x)\,dx = x + (1-x)\ln(1-x).$

Így tehát $\quad f(x) = 1 + \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)$, ha $|x| < 1$.

17.22. $\sqrt[n]{n} \to 1$, tehát $R = 1$.

Legyen $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Legyen $h(x)$ az a primitív függvénye $g(x)$-nek, amelyre $h(0) = 0$. Ezt a függvényt a hatványsor tagonkénti integrálásával kaphatjuk meg:

$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$. Így tehát $g(x) = h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, ezért

$$f(x) = x \cdot g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

17.23. $\sqrt[n]{n(n+1)} \to 1$, tehát $R = 1$.

Legyen $g(x)$ az a primitív függvénye $f(x)$-nek, amelyre $g(0) = 0$. Ezt a függvényt a hatványsor tagonkénti integrálásával kaphatjuk meg:

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Az előző feladat eredményét felhasználva $g(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$.

Innen már könnyen kapjuk $f(x)$-et:

$$f(x) = g'(x) = \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = 2\frac{x(1-x)+x^2}{(1-x)^3} = 2\frac{x}{(1-x)^3}$$

18. Fourier-sorok

18.2. Mivel $\operatorname{sgn} x$ páratlan, ezért minden $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Mivel a $\operatorname{sgn} x$ függvény szakaszonként folytonosan deriválható és 0-ban az érték a két "féloldali" határérték számtani közepe, ezért a Fourier-sora előállítja a $(-\pi, \pi)$ intervallumon.

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \quad \text{ha } -\pi < x < \pi.$$

18.8. (a) Ez a függvény páratlan függvény, azaz $f(-x) = -f(x)$. ezért minden $a_n = 0$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx\, dx = \left[-\frac{\pi - x}{2} \cdot \frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = \left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{n}$$

Így tehát

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx\, dx = \frac{1}{n}.$$

Mivel az $f(x)$ függvény szakaszonként folytonosan deriválható, azért $(0,2\pi)$-n, a folytonossági helyein a függvényt előállítja a Fourier-sora.

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \text{ha } 0 < x < 2\pi.$$

(b) Az előző Fourier-sorfejtésben írjunk x helyébe $\frac{\pi}{2}$-t.

Mivel $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n & \text{ha } k = 2n+1 \\ 0 & \text{ha } k = 2n \end{cases}$, ezért

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

18.9. (a) Mivel f páros függvény,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = 0, \text{ azaz a } b_n\text{-ek mind nullák.}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

ha $n > 0$, kétszer parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = (-1)^n\frac{4\pi}{n^2} - \frac{2}{n^3}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n\frac{4\pi}{n^2}.$$

Így tehát $n > 0$ esetén

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

Mivel $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, ezért f Fourier-sora egyenletesen konvergens a Weierstrass-kritérium szerint és mivel f folytonos, a Fourier-sora előállítja a függvényt.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad \text{ha } -\pi \le x \le \pi.$$

(b) Ha az előző Fourier-sorban x helyébe π-t írunk és felhasználjuk, hogy $\cos n\pi = (-1)^n$ kapjuk, hogy

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Átrendezés után pedig

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

19. Lineáris vektorterek

19.3. (a) Az első tényező oszlopainak száma meg kell, hogy egyezzen a második tényező sorainak számával. Ezért csak a BA szorzás nem értelmes.

(b)

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & B & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & -2 & 4 & 3 & 1 \\ A & & & 5 & 0 & -6 & 2 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ 1 & -3 & 2 & 17 & -10 & -18 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -15 & 8 & -9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 24 & 28 & -9 & 33 \end{array} \qquad \text{Tehát } C = \begin{pmatrix} 17 & -10 & -18 & 5 \\ -15 & 8 & -9 & 3 \\ 24 & 28 & -9 & 33 \end{pmatrix}$$

19.4. Vonjuk ki az első sort a másodikból és adjuk hozzá a negyedik sorhoz az első sor kétszeresét:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A második oszlop szerint fejtsük ki a determinánst:

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4\cdot 5 + 3\cdot(-1) = 2 - 20 - 3 = -21$$

Tehát $D = -21$

19.8. Számoljuk ki az A mátrix determinánsát:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 12 = 6$$

Számoljuk ki az adjungált aldeterminánsakból álló A^* mátrixot és ennek a transzponáltját, $\widehat{A}$-t:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 12 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Így tehát $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 12 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.12. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda)$$

Ennek gyökei, a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$$

Írjuk fel és oldjuk meg a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó lineáris homogén egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} -y & - & z & = & 0 \\ -3y & & & = & 0 \\ 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Innen x tetszőleges, válasszuk 1-nek, $y = 0$ és $z = 0$.

Tehát a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó (egyik) sajátvektor sorvektor alakban írva: $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$

Írjuk fel és oldjuk meg a $\lambda_1 = -1$-hez tartozó lineáris homogén egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Innen $x = 0$, $y = -z$. Válasszuk y-t 1-nek.

Tehát a $\lambda_2 = -1$-hez tartozó (egyik) sajátvektor sorvektor alakban írva: $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1)$

Írjuk fel és oldjuk meg a $\lambda_1 = 1$-hez tartozó lineáris homogén egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & -2y & & & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \end{array}$$

Innen $x = z$, $y = 0$. Válasszuk x-t 1-nek.

Tehát a $\lambda_3 = 1$-hez tartozó (egyik) sajátvektor sorvektor alakban írva: $\mathbf{v}_3 = (1,0,-1)$

20. Differenciálegyenletek

20.1. Ez egy szeparálható differenciálegyenlet. Átrendezés után:

$$\frac{y'}{1-y^2} = -\frac{1}{1-x^2}, \text{ illetve } \int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{dx}{1-x^2}$$

innen

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

A másik oldalon is elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2}\ln c.$$

Egyszerűsítések és a két oldal e hatványra emelésével

$$\frac{1+y}{1-y} = c\cdot\frac{1-x}{1+x}.$$

20.7. Newton törvénye szerint a test lehűlési sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. A kenyér lehűlésének differenciálegyenlete tehát a következő:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

ahol T a kenyér hőmérséklete °C-ban, T_0 a levegő hőmérséklete (a mi esetünkben 25°C), k egy arányossági tényező, ami ebben az alakban negatív, $\frac{dT}{dt} = T'$ pedig a kenyér lehűlési sebessége.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dT}{T-T_0} = k\,dr$$

Mindkét oldalt integrálva

$$\int \frac{dT}{T-T_0} = k\int dr$$

vagyis

$$\ln(T - T_0) = kt + \ln C$$

azaz

$$T(t) = Ce^{kt} + T_0 = C\left(e^k\right)^t + T_0$$

Határozzuk meg a C állandót:

Ha $t = 0$ időpontban $T = 100$, azaz $T(0) = 100 = C + 25$. Innen

$$C = 75$$

Hátra van még a k anyagi állandó, illetve az e^k kifejezés meghatározása. Ehhez azt használjuk fel, hogy ismert a T értéke a $t = 20$ időpontban is:

$$T(20) = 60 = 75e^{20k} + 25 = 75\left(e^k\right)^{20} + 25$$

innen

$$e^k = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$$

A kenyér lehűlési folyamatának egyenlete feladatunk feltételei mellett:

$$T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$$

Keressük azt a t időpontot, amikor $T = 30$:

$$30 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$$

Innen $t = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ perc.

20.8. A tartályban a t időpontban a só koncentrációja $q(t)$, ezért Δt idő alatt a tartályból $v\Delta t q(t)$ mennyiségű só folyik ki. (Mivel adott idő alatt a tartályba ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, a tartályban állandóan V liter folyadék lesz, ezért a kifolyt keverékben levő víz mennyiségével nem kell foglalkoznunk.) A tartályba Δt idő alatt $v\Delta t p$ mennyiségű só kerül be a tartály feletti csapból. Tehát Δt idő alatt a tartályban levő só mennyiségének a megváltozása $v\Delta t p - v\Delta t q(t)$, a koncentráció megváltozása

$$\frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{v\Delta t p - v\Delta t q(t)}{\Delta t} = vp - vq(t)$$

lesz. A $\Delta t \to 0$ határátmenettel differenciálegyenletet kapunk a $q(t)$ függvényre:

$q'(t) = vp - vq(t)$ illetve átrendezés után

$q'(t) + vq(t) = vp.$

Ez egy elsőrendű lineáris differenciál egyenlet. A homogén rész $q'(t) + vq(t) = 0$ egy megoldása az e^{-vt} függvény. Ha az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstans alakban keressük, akkor kapjuk a p konstans függvényt, ez az az eset, amikor a koncentrációt állandó szinten tartjuk. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$q(t) = p + ce^{-vt}$$

ahol c tetszőleges valós szám. Mivel kezdetben csak víz volt a tartályban, ezért

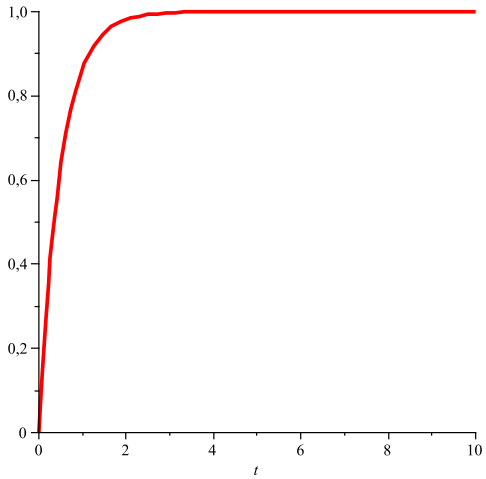
$$q(0) = 0$$

Ha tehát az általános megoldásba behelyettesítjük a $t = 0$ időpontot, akkor kapunk c-re egy egyenletet: $0 = p + c$, azaz $c = -p$. A keresett megoldás tehát

$q(t) = p - pe^{-vt}$ vagy másképp írva $q(t) = p(1 - e^{-vt})$.

Látni tehát, hogy az ideális stabil állapotot, amikor a koncentráció nem változik, soha nem érhető el. Persze a megoldás t függvényében olyan gyorsan tart a konstans p függvényhez, hogy elég rövid idő után a koncentráció változása nem mérhető és így állandónak tekinthető. De ha például benzinhez kevernek adalékanyagokat az oktánszám növelése miatt, hát elég rosszul jár az az autós, aki a folyamat elején tankol.

Az alábbi függvény grafikon a $p = 1,\ v = 2$ esetben ábrázolja a folyamatot:



Látni tehát, hogy két perc elteltével a koncentráció lényegében nem változik.

20.9. A változók szétválasztása után az integrál:

$$\int \frac{dm}{(a-m)(b-m)} = K \int dt$$

A bal oldalon szereplő integrandust bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{1}{(a-m)(b-m)} = \frac{A}{a-m} + \frac{B}{b-m}$$

azaz

$$1 = A(b-m) + B(a-m)$$

A két oldal együtthatóinak összehasonlítása után a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk az ismeretlen A-ra és B-re:

$$1 = bA + aB$$

$$0 = -mA - mB$$

A második egyenletből $B = -A$, és így

$$A = -\frac{1}{a-b},\ b = \frac{1}{a-b}$$

Elvégezve az integrálást és a jobb oldalon bejövő konstanst alkalmas alakban írva:

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{a-m}{b-m} = Kt + \frac{1}{a-b} \ln C$$

Átalakítás után:

$$\frac{a-m}{b-m} = Ce^{K(a-b)t}$$

C meghatározásához használjuk fel az $m(0) = 0$ kezdeti feltételt, amiből kapjuk, hogy

$$C = \frac{a}{b}$$

Mivel a feladatban egy bizonyos időpont meghatározása szerepel, érdemes a t időt kifejezni m segítségével:

$$t = \frac{1}{K(a-b)} \ln \frac{b(a-m)}{a(b-m)}$$

A még ismeretlen K arányossági tényezőt az $m(23) = 0{,}1a = 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}001$ feltételből határozhatjuk meg, amelyre a számolások elvégzése után kapjuk, hogy

$$K \approx 3{,}19$$

A kapott K számértéket behelyettesítve, valamint m helyébe $m = 0{,}15a = 0{,}0015$-öt írva

$$T \approx 47{,}9 \text{ perc.}$$

Tehát az etil-acetát mennyisége közelítőleg 48 perc alatt csökken 15 %-kal.

20.10. kb. 18,1 kg

20.11. kb. $0{,}17\%$

20.12. kb. $0{,}124\%$

20.13. Ez egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Oldjuk meg először a megfelelő homogén egyenletet:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

A változók szétválasztása után

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \text{ integrálalakban: } \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

A homogén rész megoldása tehát

$$y_h = c \cdot x.$$

Kétféleképp is kereshetjük partikuláris megoldását az inhomogén egyenletnek:

1) Keressük $y_p = ax^3 + bx^2$ alakban. Ekkor

$$3ax^2 + 2bx - ax^2 - bx = 2x^2 + x \text{ azaz } 2ax^2 + bx = 2x^2 + x$$

Innen $a = 1$ és $b = 1$, ezért $y_p = x^3 + x^2$.

2) Az "állandó variálásának" módszerével keressük a partikuláris megoldást $y_p = c(x) \cdot x$ alakban. A behelyettesítés után

$$c' \cdot x = 2x^2 + \text{x, azaz } c' = 2x + 1 \text{ és így } c(x) = x^2 + x.$$

Ezért az előző megoldásnak megfelelően $y_p = x^3 + x^2$.

Az egyenlet általános megoldása tehát:

$$y = x^3 + x^2 + c \cdot x$$

20.20. A feltétel szerint az (x, y) pontban húzott érintőszakaszt, azaz az y-tengellyel való $(0, b)$ metszéspont és az x-tengellyel való $(a,0)$ metszéspont közötti szakaszt felezi az (x, y) pont. Eszerint

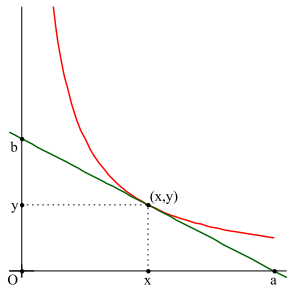
$$b - y = y, \ a - x = x, \text{ azaz } b = 2y, \ a = 2x.$$

Felhasználva, hogy az érintő meredeksége $\frac{b}{a} = -y'$, a két egyenlet hányadosaként kapjuk, hogy

$$-y' = \frac{y}{x}, \text{ azaz } y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Ez egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása

$$y = \frac{c}{x}.$$



20.27. A másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$. Így a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Keressük az egyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = ax^2 + bx + c$ alakban. Az egyletbe való behelyettesítés után

$$2a - (2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = x^2$$

A baloldalt átrendezve

$$-6ax^2 - (2a + 6b)x + (2a - 6c) = x^2$$

Az együtthatók összehasonlításával a következő egyenletrendszert kapjuk a, b és c-re:

$$1 = -6a$$

$$0 = 2a + 6b$$

$$0 = 2a - 6c$$

Innen $a = -\dfrac{1}{6}$, $b = \dfrac{1}{18}$, $c = -\dfrac{1}{18}$. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{1}{18} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

20.30. Jelölje

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ekkor az egyenletrendszer vektoriális alakban

$$\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Keressük meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. A sajátértékekre a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (kétszeres sajátérték), és $\lambda_3 = 2$ Sajátvektorai pedig

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keressük az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris $\mathbf{x}_p$ megoldását konstans vektor alakjában. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}_p = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A lineáris differenciálegyenletrendszer általános megoldása vektoriális alakban:

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{-t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{2t}\mathbf{v}_3 + \mathbf{x}_p$$

Az eredményt felírhatjuk koordinátánként:

$$x = (c_1 + c_2)e^{-t} + c_3 e^{2t} - 1, \qquad y = -c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} - 1, \qquad z = -c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} - 1$$

20.31. A t időpontban a P és a Q anyag keletkezésének sebessége a következő:

$$\dot{x} = k_1(a - x - y)$$
$$\dot{y} = k_2(a - x - y)$$

mert eddig a pillanatig az A anyagból még $a - x - y$ maradt felbomlatlanul. Az egyenleteket átrendezve

$$\dot{x} + k_1 x + k_1 y = ak_1$$
$$\dot{y} + k_2 x + k_2 y = ak_2$$

Jelölje $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{b}$$

A K mátrix sajátértékei 0 és $k_1 + k_2$, a megfelelő sajátvektorok $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$. Egy partikuláris megoldás például az $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ konstans vektor. Az egyenlet általános megoldása koordinátánként felírva:

$$x = a + c_1 + c_2 k_1 e^{-(k_1+k_2)t}, \qquad y = -c_1 + c_2 k_2 e^{-(k_1+k_2)t}$$

Határozzuk meg az ismeretlen paramétereket! Mivel a feltételek szerint

$$0 = x(0) = a + c_1 + c_2 k_1$$
$$0 = y(0) = -c_1 + c_2 k_2$$

ezért $c_2 = -\dfrac{a}{k_1 + k_2}$, $c_1 = -\dfrac{ak_2}{k_1 + k2}$, és így némi átalakítás után

$$x = \frac{ak_1}{k_1 + k2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right), \qquad y = \frac{ak_2}{k_1 + k2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right)$$

A még ismeretlen k_1 és k_2 paramétereket a második feltételből határozhatjuk meg:

$$x(1) = \frac{3}{8}a = \frac{ak_1}{k_1 + k2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right)$$
$$y(1) = \frac{1}{8}a = \frac{ak_2}{k_1 + k2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right)$$

Mindkét egyenletet a-val egyszerűsítve, majd az első egyenletet *elosztva* a másodikkal, azt kapjuk, hogy

$\dfrac{k_1}{k_2} = 3$, azaz $k_1 = 3k_2,\ k_1 + k_2 = 4_k 2$. Az második egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$k_2 = \frac{1}{4}\ln 2,\ k_1 = \frac{3}{4}\ln 2,\ k_1 + k_2 = \ln 2$$

Az eredményeket beírva a megoldásba, azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{3}{4}a\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \qquad y = \frac{1}{4}a\left(1 - \frac{1}{2^t}\right).$$

21. Többváltozós leképezések

21.1. Számoljuk ki az érintőegyenes $\mathbf{v}$ irányvektorát, azaz a görbe deriváltvektorát a $t = 2$ paraméterérték esetén:

$$\mathbf{r}(t) = (t - 3)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

Az irányvektor: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Az érintési pont: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(2) = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Az érintő irányvektoros alakja:

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\,t = (t-1)\mathbf{i} + (4t+5)\mathbf{j} + (4t+4)\mathbf{k}$$

22. Vonalintegrál

22.1. A C görbe paraméteres alakja:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad -1 \le t \le 1$$

azaz

$$x = t,\ y = t^2, \quad dx = \dot{x}(t) = 1,\ dy = \dot{y}(t) = 2t, \quad -1 \le t \le 1$$

A vonalintegrál kiszámolásáról szóló képlet szerint:

$$\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy = \int_{-1}^{1} \left[(t^2 - 2t^3)\cdot 1 + ((t^4 - 2t^3)\cdot 2t\right]\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 3t^3 - 2t^4 + t^5)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^4}{4} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$$

22.2. Az ellipszis természetes paraméterezésként válasszuk az:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

paraméterezést. Ekkor dx illetve dy helyébe

$$dx = a\sin t,\ dy = a\cos t$$

kerül. Így az integrál visszavezethető egyváltozós Riemann-integrálra:

$$\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int_0^{2\pi} a^2[-(\cos t + \sin t)\sin t + (\cos t - \sin t)\cos t]\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,dt = 0$$

Megjegyzés:

Könnyen látható, hogy az $U(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2}$ függvény primitív függvénye az integrandusnak, ezért a körintegrál értéke 0.

22.5. Keressünk egy olyan $z(x,y)$ kétváltozós függvényt, amelyre

$$z'_x(x,y) = p(x,y) = x^2 + 2xy - y^2, \quad z'_y(x,y) = q(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$$

$$z(x,y) = \int p(x,y)\,dx = \int (x^2 + 2xy - y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 + g(y)$$

Itt $g(y)$ egyenlőre ismeretlen (deriválható) függvénye y-nak. Erre a $z(x,y)$ függvényre teljesülnie kell, hogy

$$z'_y(x,y) = x^2 - 2xy + g'(y) = q(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$$

Ebből az egyenletből

$$g'(y) = -y^2, \text{ ezért } g(y) = -\frac{y^3}{3} + C.$$

Így tehát az összes primitív függvény

$$z(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$$