

12.2. Házi Feladatok

12.1. Házi Feladat. Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.

- | | |
|---|---|
| 1.) $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$ | 19.) $f(x) = e^{e^x}$ |
| 2.) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \cdot \ln x + 3 \cdot 2^x$ | 20.) $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$ |
| 3.) $f(x) = 3 \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4}$ | 21.) $f(x) = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 2 \cos x}$ |
| 4.) $f(x) = \frac{5 \sin x}{1 + \cos x}$ | 22.) $f(x) = \left(\ln \frac{1}{\sin x} \right)^7$ |
| 5.) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ | 23.) $f(x) = \cos \operatorname{ctg}(x^2 + 1)$ |
| 6.) $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x \cdot e^x}$ | 24.) $f(x) = \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(1-x^2)$ |
| 7.) $f(x) = \sin x^2$ | 25.) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ |
| 8.) $f(x) = \sin^2 x$ | 26.) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ |
| 9.) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | 27.) $f(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$ |
| 10.) $f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1+x^2}$ | 28.) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$ |
| 11.) $f(x) = \pi \cdot \cos^2 x^3 - e^2 \cdot \sin 2$ | 29.) $f(x) = (\sqrt{x} + 7)^6$ |
| 12.) $f(x) = e^{\sin(x + \frac{\pi}{2})}$ | 30.) $f(x) = \operatorname{tg} x^3 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ |
| 13.) $f(x) = \log_3 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$ | 31.) $f(x) = \arcsin(\cos x)$ |
| 14.) $f(x) = \ln \ln^2 x^3$ | 32.) $f(x) = \log_3 \ln x$ |
| 15.) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot (\ln \operatorname{tg} x)^7$ | 33.) $f(x) = \ln \frac{7-5x}{2x-3}$ |
| 16.) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$ | 34.) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$ |
| 17.) $f(x) = \left((x^2 + 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x + 6)^5 \right)^4$ | |
| 18.) $f(x) = \sin^7 x^7$ | |

Megoldások: [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#) [12](#) [13](#) [14](#) [15](#) [16](#) [17](#)
[18](#) [19](#) [20](#) [21](#) [22](#) [23](#) [24](#) [25](#) [26](#) [27](#) [28](#) [29](#) [30](#) [31](#) [32](#) [33](#) [34](#)

12.2. Házi Feladat. Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.

- | | | | |
|--|--------------------------|--|--------------------------|
| a) $f(x) = (\sqrt{x})^{\ln \frac{1}{x}}$ | megoldás | c) $f(x) = \left(\frac{3}{x} \right)^{x^3}$ | megoldás |
| b) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ | megoldás | d) $f(x) = \sin(x^{\cos x})$ | megoldás |

12.3. Megoldások

12.1. Házi Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

1.) $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$

Megoldás.

$$f'(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)$$

◇
vissza a feladathoz

2.) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \cdot \ln x + 3 \cdot 2^x = x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln x + 3 \cdot 2^x$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln x + x^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

◇
vissza a feladathoz

3.) $f(x) = 3 \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \sin x + x^{\frac{1}{3}} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4}$

Megoldás.

$$f'(x) = 3 \cdot \cos x + \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos x - x^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x + 0$$

◇
vissza a feladathoz

4.) $f(x) = \frac{5 \sin x}{1 + \cos x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \cos x \cdot (1 + \cos x) + 5 \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

◇
vissza a feladathoz

5.) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

6.) $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x \cdot e^x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{(e^x + \sin x) \cdot (x \cdot e^x) - (e^x - \cos x) \cdot (1 \cdot e^x + x \cdot e^x)}{(x \cdot e^x)^2}$$

◇
vissza a feladathoz

7.) $f(x) = \sin x^2$

Megoldás.

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

8.) $f(x) = \sin^2 x$

Megoldás.

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

9.) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - 1 \cdot (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

10.) $f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1+x^2} = \operatorname{ctg} (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{1}{3} (1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

11.) $f(x) = \pi \cdot \cos^2 x^3 - e^2 \cdot \sin 2$

Megoldás.

$$f'(x) = \pi \cdot 2 \cdot \cos x^3 \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2 = -6\pi x^2 \cdot \cos x^3 \cdot \sin x^3$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

12.) $f(x) = e^{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$

Megoldás.

$$f'(x) = e^{\sin(x+\frac{\pi}{2})} \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot 1$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

13.) $f(x) = \log_3 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \cdot \ln 3} \cdot \frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{1}{2} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

14.) $f(x) = \ln \ln^2 x^3$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x^3} \cdot 2 \cdot \ln x^3 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$15.) f(x) = \operatorname{tg} x \cdot (\ln \operatorname{tg} x)^7$$

$$\text{Megoldás. } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\ln \operatorname{tg} x)^7 + \operatorname{tg} x \cdot 7 (\ln \operatorname{tg} x)^6 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$16.) f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$$

Megoldás.

$$f'(x) = 2x(x^3 + 2)(x^4 + 3) + (x^2 + 1)3x^2(x^4 + 3) + (x^2 + 1)(x^3 + 2)4x^3$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$17.) f(x) = \left((x^2 + 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x + 6)^5 \right)^4$$

Megoldás.

$$f'(x) = 4 \left((x^2 + 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x + 6)^5 \right)^3 \cdot \left(3(x^2 + 3x + 2)^2 \cdot (2x + 3) + 5(x^2 - 5x + 6)^4 \cdot (2x - 5) \right)$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$18.) f(x) = \sin^7 x^7$$

Megoldás.

$$f'(x) = 7 \sin^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$19.) f(x) = e^{e^x}$$

Megoldás.

$$f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$20.) f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$$

Megoldás.

$$f'(x) = \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + 2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x + 3 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$21.) f(x) = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 2 \cos x}$$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 2 \sin x) \cdot (\sin x - 2 \cos x) - (\sin x + 2 \cos x) \cdot (\cos x + 2 \sin x)}{(\sin x - 2 \cos x)^2}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$22.) f(x) = \left(\ln \frac{1}{\sin x} \right)^7$$

Megoldás.

$$f'(x) = 7 \left(\ln \frac{1}{\sin x} \right)^6 \cdot \sin x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

23.) $f(x) = \cos \operatorname{ctg}(x^2 + 1)$

Megoldás.

$$f'(x) = -\sin \operatorname{ctg}(x^2 + 1) \cdot \frac{-1}{\sin^2(x^2 + 1)} \cdot 2x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

24.) $f(x) = \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(1-x^2)$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{\left(\arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \sqrt{1-x^2} - (x \cdot \arcsin x) \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(1-x^2)} \cdot (-2x).$$

[vissza a feladathoz](#)

25.) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

Megoldás.

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^3 x - \sin^2 x \cdot 3 \cos^2 x \cdot \sin x$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

26.) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \ln(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \sqrt{2x-1} \cdot \frac{-1}{2} \cdot (2x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

27.) $f(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x^2}} = \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

28.) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{x+2 - (x-1)}{(x+2)^2}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

29.) $f(x) = (\sqrt{x} + 7)^6 = \left(x^{\frac{1}{2}} + 7\right)^6$

Megoldás.

$$f'(x) = 6 \left(x^{\frac{1}{2}} + 7\right)^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

◇

[vissza a feladathoz](#)

$$30.) f(x) = \operatorname{tg} x^3 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{tg} x^3 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

[vissza a feladathoz](#)

$$31.) f(x) = \arcsin(\cos x)$$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) = \frac{1}{|\sin x|} \cdot (-\sin x) = -1 \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$$

vagy

$$f(x) = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \quad \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ és így}$$

$$f'(x) = 1.$$

Ebben az esetben viszont fontos az értelmezési tartomány szűkítése.

[vissza a feladathoz](#)

$$32.) f(x) = \log_3 \ln x$$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x \cdot \ln 3} \cdot \frac{1}{x}$$

[vissza a feladathoz](#)

$$33.) f(x) = \ln \frac{7-5x}{2x-3}$$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{2x-3}{7-5x} \cdot \frac{-5(2x-3) - 2(7-5x)}{(2x-3)^2}$$

[vissza a feladathoz](#)

$$34.) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$$

Megoldás.

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^x(1-e^x) + e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^2}$$

[vissza a feladathoz](#)