

**L'Hospital szabály. Határérték a végtelenben: nagyságrendek.**

1. Miért nem lehet az alábbi határértékeket behelyettesítéssel kiszámítani? Sejtse meg a határértéket közeli érték behelyettesítésével!

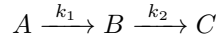
(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x^2 + x}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(\pi x)}$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2}$

Számítsa ki a számlálóban és nevezőben álló függvények elsőrendű közelítését, és így határozza meg a hányados határértékét!

2. Egymás után bekövetkező elsőrendű reakciók



ahol  $k_1, k_2$  konstansok, esetén, a közbenső termék,  $B$ , maximális koncentrációja

$$C_{B,max} = C_{A,0} m^{1/(1-m)}$$

ahol  $m = \frac{k_1}{k_2}$ . A formula csak akkor értelmes, ha  $k_1 \neq k_2$ . A  $k_1 = k_2$  esetben a maximális koncentráció

$$C_{B,max} = C_{A,0} \lim_{m \rightarrow 1} m^{1/(1-m)}.$$

Becsülje meg

$$\lim_{m \rightarrow 1} \ln C_{B,max}$$

értékét 1-hez közeli  $m$  behelyettesítésével! Alkalmazza az elsőrendű közelítés módszerét a határérték meghatározásához!

Milyen eredményt ad ez  $C_{B,max}$ -ra a  $k_1 = k_2$  esetben?

3. Az alábbi határértékek kiszámításához használjon másodrendű közelítést. Számítsa ki, és ábrázolja a számlálóban és nevezőben álló függvények másodrendű közelítését, és utána becsülje a hányadost!

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(2x)}$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{(1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1 + x})}$

4. Einstein elmélete szerint egy egyatomos szilárd halmazállapotú test moláris hőkapacitása

$$C_\nu = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

ahol  $R$  a gáz állandó, és  $x = \frac{h\nu}{kT}$ .

Mihez közelít  $C_\nu$  értéke, ahogy  $T$  egyre nagyobb és nagyobb lesz? Azaz, mennyi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3Rx^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

értéke?

5. Vizsgálja meg az  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$  függvényt! Van-e olyan pont, ahol a határérték végtelen? Mi a határérték a végtelenben?

6. Állítsa nagyságrendi sorrendbe, azaz határozza meg, hogy az egyre nagyobb értékekre melyik függvény győzi le a másikat:

(a)  $x$

(b)  $x^2$

(c)  $2^x$

(d)  $8^x$

(e)  $\log_{10} x$

7. Az alábbi függvények mind 0-hoz tartanak, ahogy  $x$  tart végtelenbe. Melyikük tart 0-hoz a leggyorsabban?

(a)  $\frac{1}{x}$

(b)  $\frac{x}{x^2 + 1}$

(c)  $e^{-x}$

(d)  $10^{-x}$