

Összetett függvények és a láncszabály. Az inverz függvény és deriváltja.

1. Jancsi és Juliska a Nagy Kerek Erdőben sétálnak az erdő közepébe tartó ösvényen. Útjuk során egyre mélyebbre hatolnak az erdőben. Legyen $Ja(t)$, illetve $Ju(t)$, az a távolság, (méterben) amilyen messze kerül Jancsi, illetve Juliska, az erdő szélétől t perc alatt. Az alábbi feladatban feltehető, hogy $Ja(t)$ és $Ju(t)$ invertálhatóak és differenciálhatóak.

Mit jelentenek az alábbi kifejezések? Válaszoljon értelmes, kerek mondatban.

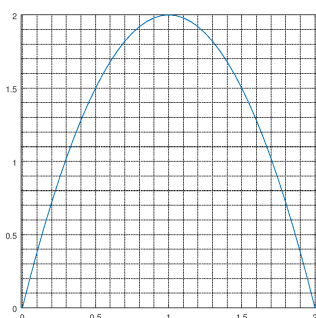
(a) $Ja^{-1}(50)$. (b) $Ju(Ja^{-1}(200))$. (c) $Ja'(10)$.

(d) Mit jelent a következő egyenlet? Válaszoljon kerek mondatban.

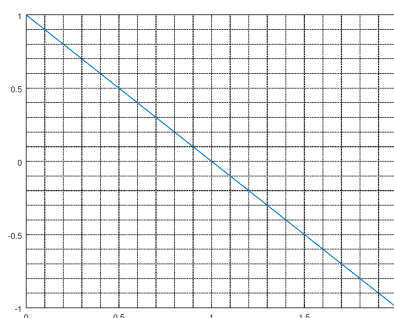
$$Ju^{-1}(120) + 0,1 = Ja^{-1}(120).$$

Fejezze ki a Ja , Ju függvényekkel az alábbi mennyiségeket! (Képletekben, ne mondatokban.)

- (e) Az a távolság, amit Juliska tett meg 12 perc alatt.
 (f) Az az idő, ami alatt Jancsi 150 métert tett meg.
 (g) Az az idő, ami Jancsinak kellett annak a távolságnak a megtételéhez, amit Juliska az első fél óra alatt tett meg.
 (h) Amikor Juliska 1000 méterre volt az erdőben, akkor 1 perc alatt 30 métert tett meg. Mennyi idő alatt tett meg 1 métert ennél a távolságnál? Fogalmazza meg ezt az információt deriváltként! (Ez kétféleképp is megtehető, mindkét megfogalmazást írja fel.)
2. Az elsőrendű közelítéseket használva találja meg az alábbi összetett függvények deriváltját a megadott helyen.
- (a) Mi a lineáris közelítése $\sin x$ -nek $x = 0$ közelében? e^u -nak, $u = 0$ közelében? $e^{\sin x}$ -nek $x = 0$ közelében?
 (b) Mi a lineáris közelítése e^x -nek $x = 0$ közelében. \sqrt{u} -nek, $u = 1$ közelében? $\sqrt{e^x}$ -nek $x = 0$ közelében?
 (c) Mi a lineáris közelítése $\cos x$ -nek $x = -\pi/3$ közelében? u^2 -nek, $u = \frac{1}{2}$ közelében? $(\cos x)^2$ -nek $x = -\pi/3$ közelében?
3. Az alábbi ábrákon látható függvényeknél becsülje meg $h'(1,5)$ értékét a $h(x) = f(g(x))$ összetett függvényre!

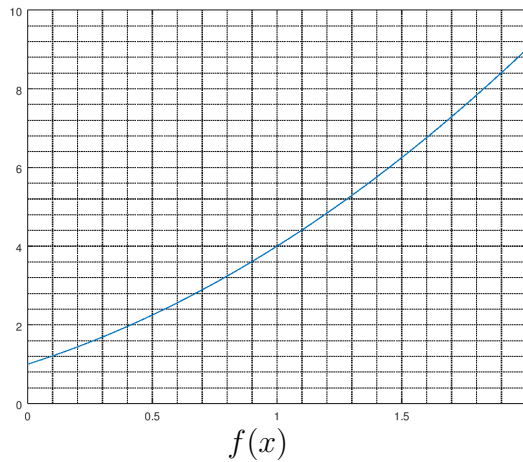


$g(x)$



$f(x)$

4. Az alábbi ábrán egy $f(x)$ függvény grafikonja látható. Mi mondható az $f(x)$ függvényről monotonitás tekintetében a $[0, 2]$ intervallumon? Becsülje meg $f'(1)$ értékét! Legyen g az f függvény inverze. Becsülje meg $g'(4)$ értékét!



5. Legyen $k(x) = x^3 + x$. Mutassa meg, hogy k invertálható. Legyen $r(x) = k^{-1}(x)$, a k függvény inverz függvénye. Ábrázolja vázlatosan a $k(x)$ és $r(x)$ függvények grafikonját! Határozza meg a $k(x)$ függvény meredekségét, és az érintő egyenletét az $(1, 2)$ pontban. Határozza meg a $r(x)$ függvény meredekségét a $(2, 1)$ pontban, a két grafikon közötti geometriai kapcsolat felhasználásával!
6. Az ELTE néhány hallgatója egy új reggeli innivalót fejlesztett ki, a Szalonnás Rántotta Ízű Tejet. A termék nagyon népszerű az osztrák Alpokban, ezért egy nagyobb szállítmányt küldenek oda, egy 4,5 tonnás kisteherautóval. Amikor a teherautó egy 25%-os emelkedőn halad felfelé, a sebessége 60 km/h. Milyen sebességgel csökken ekkor a környező hőmérséklet? (Feltehető, hogy a magasság függvényében a hőmérséklet 1°C -ot csökken 200 méterenként. Az emelkedő meredeksége a vízszintesen megtett úthoz vonatkoztatva értendő.)
7. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját!

(a) $h(t) = \sin(\omega t)$,

(c) $y = \sqrt{1 - x^2}$

(e) $C(x) = axe^{-bx}$,

(b) $N(x) = e^{ax}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$,

(f) $x(t) = \frac{Ae^{-\lambda t}}{B + e^{-\lambda t}}$