

A szorzatszabály.

1. Elvira a frissen épített robotját akarja beprogramozni. Ehhez az Octave programozási nyelv grafikus felületét használja. A felület először egy kisebb méretű ablakban (700×400 pixel) jelent meg, és Elvira nagyobbra akarja átméretezni. Ehhez a jobb felső sarokra kattint az egérrel és egy kicsit arrébb húzza a képernyő jobb felső sarka irányába. Az ablak mérete az eredeti állapottól számítva az idő függvénye. Ezt az új méretet két függvény írja le:

- az ablak szélessége (pixelben) t századmásodperc múlva $x(t)$.
- az ablak magassága (pixelben) t századmásodperc múlva $y(t)$.

- (a) Mi $x(0)$ és $y(0)$ értéke?
- (b) Milyen előjelű lesz az $x'(t), y'(t)$ derivált az átméretezés során?
- (c) A $t = 40$ időpillanatban $x(t) = 780$ és $y(t) = 450$. Ugyanebben az időpillanatban $x'(t) = 15$ és $y'(t) = 10$. Mi a pillanatnyi sebessége az ablakméret változásának a $t = 40$ pillanatban?

2. Írja fel a a derivált függvény definícióját határértékként az alábbi függvényekre az $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ pontokban, és általános x -re!

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| (a) $f(x) = x^2$. | (c) $f(x) = x^3$. |
| (b) $f(x) = \frac{1}{x}$. | (d) $f(x) = \sqrt{x}$. |

3. Felhasználva a szorzatszabályt, és hogy $(x)' = 1$, találja meg az alábbi függvények deriváltját!

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|
| (a) x^2 | (b) x^3 | (c) x^4 | (d) x^{10} | (e) x^n |
|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|

Lehet ezt a trükköt az $\frac{1}{x}$, a \sqrt{x} függvényekre alkalmazni?

4. Határozza meg annak az egyenesnek a meredekségét, ami az $y = x^3$ függvényt a $(2, 8)$ pontban érinti! Mi ennek az érintő egyenesnek az egyenlete?

5. Az alábbiakban az $f^n(x)$ az $(f(x))^n$ függvényt jelöli. Legyen $f(x)$ deriválható. Felhasználva a szorzatszabályt, mutassa meg, hogy

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| (a) $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$ | (b) $(f^3(x))' = 3f^2(x)f'(x)$ | (c) $(f^4(x))' = 4f^3(x)f'(x)$ |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|

Milyen kifejezést vár az $(f^n(x))'$ deriváltra? Mi lesz $(x^3 + 1)^3$ deriváltja?

6. Egy léggömb felfújásakor a léggömb d átmérője az idő függvénye, $d = d(t)$, ahol d cm-ben, t másodpercben van megadva. Tudjuk, hogy a $t = 3$ pillanatban $d = 20$ és d változásának pillanatnyi sebessége $5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

- (a) Mekkora a pillanatnyi sebessége a a léggömb $V = V(t)$ térfogatának a $t = 3$ pillanatban?
- (b) Mekkora a pillanatnyi sebessége a a léggömb $S = S(t)$ felszínének a $t = 3$ pillanatban?